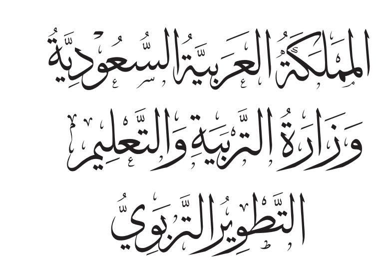




الرِّيَاضِيَّات

لِلصَّفِّ الأول الثَّانَوِيّ

الفصْل الدِّراسيُّ الأول

تأليف

د. سلمان عبد الرحمن السلمان — د. محمد عبد الرحمن القويز
د. عبد اللّه محمد الراشد — د. فوزي أحمد الذكير
د. عبد اللّه المقوشي — د. عبد الرحمن أبوعمة
أ. محمد أمين شاكر

طبعة ١٤٢٨هـ - ١٤٢٩هـ
٢٠٠٧م - ٢٠٠٨م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

السعودية، وزارة التربية والتعليم

الرياضيات : للصف الأول الثانوي : الفصل الدراسي الأول ـ ط٥ ـ الرياض

٢٣٤ ص ، ٢١ x ٢٣ سم

ردمك : ٤ - ٢١٦ - ١٩ - ٩٩٦٠(مجموعة)

٢ـ٢١٧ـ١٩ـ٩٩٦٠(ج١)

١ -الرياضيات ـ كتب دراسية   ٢ - التعليم الثانوي ـ السعودية - كتب دراسية

أ ـ العنوان

ديوي ٥١٠,٧١٢   ١٩/٢١٨٨

لهذا الكتاب قيمة مهمّة وفائدة كبيرة فلنحافظ عليه ولنجعل نظافته تشهد على حسن سلوكنا معه...

إذا لم نحتفظ بهذا الكتاب في مكتبتنا الخاصة في آخر العـام للاستفادة فلنجعل مكتبة مدرستنا تحتفظ به...

موقع الوزارة

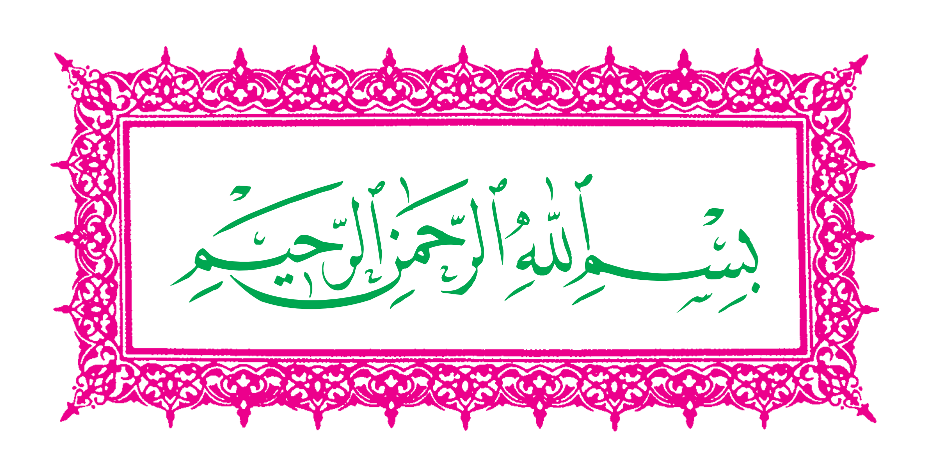
www.moe.gov.sa

موقع الإدارة العامة للمناهج

www.moe.gov.sa/curriculum/index.htm

البريد الإلكتروني للإدارة العامة للمناهج

curriculum@moe.gov.sa


بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمـــة

الحمد لله رب العالمين علَّم بالقلم، علَّم الإنسان ما لم يعلم. والصلاة والسلام على سيدنا محمد سيد الأولين والآخرين، بُعث معلماً وهادياً وعلى آله وصحبه أجمعين.

أما بعد، فإننا نقدم لأبنائنا طلبة وطالبات المرحلة الثانوية الجزء الأول من كتاب الرياضيات للصف الأول الثانوي، وفق المنهج الذي اعتمدته وزارة التربية والتعليم والذي تمت مناقشته في ندوة ضمَّت ممثلين للجامعات السعودية وعدداً من الباحثين والمربين والميدانيين من مناطق مختلفة من المملكة، وذلك خلال الفترة ٩ ـ ١٠ جمادى الآخرة لعام ١٤٠٦هـ.

جاء المنهج، وبالتالي الكتاب، مبنياً على المناهج المطوَّرة في المرحلتين الابتدائية والمتوسطة، وجاء العديد من المفاهيم الواردة فيه امتداداً لما تعلمه الطالب والطالبة في المرحلة المتوسطة مع التعميق الذي تقتضيه طبيعة المرحلة.

في الوقت ذاته فقد راعينا كون الطالب والطالبة في هذا الصف سيكونا على مفترق الطرق ليتجها نحو القسم العلمي أو القسم الأدبي، مما جعلنا نراعي الفروق الفردية بين الطلبة والطالبات خاصة في تنويع الأمثلة والتمارين.

كما راعينا عند تأليف الكتاب السهولة والإقلال من التجريد، ما أمكن، وربط مواضيعه بأمثلة من حياة الطالب والطالبة العملية وبالمفاهيم التي تقدم لهما في المواد الأخرى كالفيزياء، والكيمياء، والأحياء، وبما يصادفهما في هذا العصر المتطور من معطيات تقنية متقدمة، وبتاريخنا العلمي الحافل خلال عصورنا الذهبية، عندما سرنا على هدى الإسلام العظيم.

يضم هذا الجزء أربعة أبواب هي :

الباب الأول : المنطق الرياضي والمجموعات.

الباب الثاني : العلاقات والتطبيقات.

البالب الثالث : الهندسة المستوية.

الباب الرابع : المعادلات والهندسة التحليلية.

وقد تم عرض المفاهيم الواردة في هذه الأبواب بشكل يساعد الطالب والطالبة على محاولة التعلُّم الذاتي، إذا أردنا ذلك، لذا فقد بنيت المفاهيم على معلومات الطالب والطالبة السابقة، وتم إيضاح كل مفهوم من خلال أمثلة متنوعة، لعلّها تساعد غالبية أبنائنا على استيعاب هذه المفاهيم، ونصيحتنا لهم بالاعتماد، بعد توفيق الله تعالى، على الكتاب، سعياً وراء ذلك .

أملنا أن تصلنا من إخواننا المدرسين والمدرسات ملحوظاتهم مفصلة، حول محتويات الكتاب، من خلال التطبيق العملي الميداني، شاكرين لهم تعاونهم البنَّاء، والله ولي التوفيق.

وآخر دعوانا أن الحمد لله رب العالمين

وصلى الله على سيدنا محمد وآله وصحبه.

المؤلفون

فهـــرس

الصفحة

الباب الأول : المنطق الرياضي والمجموعات

الباب الثاني : العلاقات والتطبيقات

الباب الثالث : الهندسة المستوية — الصفحة

الباب الرابع : المعادلات والهندسة التحليلية

الباب الأول

المنطق الرياضي والمجموعات

١ ـ ١ تمهيـد .
١ ـ ٢ العبارة (البسيطة والمركبة).
١ ـ ٣ جدول الصدق .
١ ـ ٤ أدوات الربط .
١ ـ ٥ العبارات المتكافئة .
١ ـ ٦ الاقتضــاء.
١ ـ ٧ طرائق البرهان.
١ ـ ٨ المجموعات والعمليات عليها.

١ ـ ١ تمهيـــــد :

مِنْ حِكَم الله، جل شأنه، في هذا الكون أن يولد الإنسان وهو لا يعلـم شيئاً. فيشب وينمو ويتعلم شيئاً فشيئاً، وكلما اقترب من بلوغ الرشد والنضج زاد إدراكه ووسع خياله وتفكيره. ويكون بالتعَلُّم والتوجيه قادراً على التمييز بين الخطأ والصواب في حدود مَبْلَغِه من العلم وتجاربه ومؤثرات مجتمعه.

والرياضيات كفرع من فروع المعارف تعتبر من الأولويات التي لا يستغني عنها إنسان، فهو يحتاج في حياته اليومية إلى استخدام الأعداد وإلى بعض العمليات عليها .. ومن أهداف تعلم الرياضيات التعود على الدقة في التعبير والتسلسل المنطقي في الحديث والقدرة على تحديد العبارات الخاطئة والعبارات الصائبة وخدمة الكثير من العلوم الأخرى. ولكي نحقق هذه الأهداف يلزمنا تعلم شيء من «المنطق الرياضي» فما هو المنطق الرياضي؟

إن المنطق الرياضي هو أحد فروع الرياضيات، ويهتم بدراسة العبارات والربط بينها وتحديد ما إذا كان استنتاج معين منها صائباً أم خاطئاً حسب قواعد محددة.. واستخدام رموز وإشارات ومصطلحات متعارف عليها بين الرياضيين كافة، لا تترك مجالاً للاجتهاد أو اللبس. كما يهتم المنطق الرياضي بتقديم طرائق البرهان لقضية ما، والاهتمام بالتسلسل المنطقي وتبرير خطوات البرهان، والتمييز بين المعطيات (المفروض) وبين المطلوب إثباته.

١ ـ ٢ العبارة (البسيطة والمركبة) :

تنقسم الجمل في اللغة إلى قسمين مختلفين :

أولاً : الجمل الإنشائية : وهي التي لا تحمل خبراً معيناً مثل جمل النهي والطلب والنداء والتعجب والتمني وغيرها.

ثانياً : الجمل الخبرية : وهي التي تحمل لنا خبراً معيناً.

ومن أمثلة الجمل الإنشائية :

١ ـ لا تجالس الأشرار .

٢ ـ جالس الأخيار.

٣ ـ كم سورة حفظت ؟

٤ ـ ما أجمل التحلي بالأخلاق الفاضلة !

ومن أمثلة الجمل الخبرية :

٥ ـ خلق الله الجن والإنس لعبادته.

٦ ـ أحَلَّ الله البيع وحَرَّم الربا.

٧ ـ رأس الأمر الإسلام وعموده الصلاة وذروة سنامه الجهاد في سبيل الله.

٨ ـ يتجه المسلم في صلاته شطر المسجد الحرام.

٩ ـ ما جعل الله لرجل من قلبين في جوفه.

١٠ ـ المثلث المتطابق الأضلاع متساوي الزوايا.

١١ ـ $٣^{٢} + ٤^{٢} = ٥^{٢}$.

١٢ ـ ٩ > ٦.

١٣ ـ مساحة المستطيل = الطول x العرض

١٤ ـ البترول من أهم مصادر الطاقة.

١٥ ـ الزكاة ركن من أركان الإسلام .

١٦ ـ الأسد حيوان أليف.

١٧ ـ ٦+٤=٨ في مجموعة الأعداد الطبيعية.

١٨ ـ ٣ < ٥ في مجموعة الأعداد الطبيعية.

١٩ ـ صلاة الجنازة فرض عين.

٢٠ ـ س + ٣ = ٧ حيث س أيّ عدد صحيح.

٢١ ـ ٢ +٥ص ≤ ٣ حيث ص أي عدد حقيقي.

٢٢ ـ $س^{٢}$ < ٠ حيث س أي عدد حقيقي.

تأمَّل الأمثلة السابقة وحاول أن تحكم على كل جملة بالصواب أو بالخطأ.

لا شك أنك لاحظت أن الجمل الإنشائية (من «١» ـ «٤») لا معنى إطلاقاً لوصف أي منها بالخطأ أو الصواب، وكذلك الحال بالنسبة لأي جملة إنشائية في اللغة. إذ هي لا تحمل إلينا خبراً يمكن أن نصفه بالصواب أو الخطأ. أما الجمل الخبرية (من «٥» ـ«١٩») فقد لاحظت أنه بالامكان الحكم على أي منها بالصواب أو بالخطأ حيث وجدت الجمل من (٥) إلى(١٥) كلها صائبة. في حين أن الجمل من(١٦) إلى (١٩) كلها خاطئة. ولكن يجب أن يكون حكمك على جملة بالصواب أو بالخطأ مبنياً على معلومات سابقة تكون بمثابة البرهان على صحة حكمك.

فمثلاً عندما تصف الجملة (٥) بالصواب فإن برهانك على هذا ، كمسلم، قوله تعالى: ﴿وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ﴿٥٦﴾﴾ . ووصفك للجملة (١٧) بأنها خاطئة مبني على معرفتك في الرياضيات أن ٦ + ٤ = ١٠ في مجموعة الأعداد الطبيعية.

أَعِدْ النظر جيداً في الجمل الخبرية التي وصفتها بالصواب أو الخطأ، ثم أجب عن السؤال الآتي :

هل يمكن أن نصف جملة خبرية بأنها صائبة وفي ذات الوقت بأنها خاطئة؟ إن إجابتك ستكون بالنفي قطعاً، فلا يمكن أن نصف جملة خبرية بأنها صائبة وخاطئة في آن واحد ، فمثلاً الجملة (١٢) ٩ > ٦ صائبة لذلك فلا يمكن أن تصفها بأنها خاطئة.

انظر إلى الجملتين الخبريتين (٢٠)، (٢١)، وحاول أن تحكم على كل منهما من حيث كونها صائبة أو خاطئة، إنك لن تستطيع ما هو السبب ؟

إن الجملة (٢٠) احتوت على الرمز المجهول س، لذلك فصوابها وخطؤها تابع لقيمة س. ومن معلوماتك الرياضية تدرك بسهولة أن الجملة (٢٠) صائبة عندما تأخذ س القيمة ٤ فقط، وخاطئة فيما عدا ذلك . كما أن الجملة (٢١) احتوت على المجهول ص، لذلك فصوابها وخطؤها تابع لقيمة ص . حدد متى تكون الجملة (٢١) صائبة ومتى تكون خاطئة، لعلك أدركت أن جميع الأعداد الحقيقة التي هي أكبر من $\frac{١}{٥}$ أو تساوي $\frac{١}{٥}$ تجعل هذه الجملة صائبة. وأخيراً بالرغم من أن الجملة (٢٢) تحتوي على المجهول س إلاّ أنك تستطيع الحكم بأنها خاطئة لجميع قيم س ، لأنك تعلم مسبقاً أن كل عدد س سواء كان سالباً أو موجباً ، يكون مربعه عدداً موجباً دوماً، وهذا يعني أنه أكبر من الصفر (لاحظ أنه إذا كانت س = صفراً فإن صفر < صفر جملة خاطئة).

وبشكل عام فإن الجمل الخبرية التي تشتمل على مجهول (أو أكثر) يكون الحكم على صوابها وخطئها تابعاً لقيمة المجهول (أو المجاهيل). ونهتم كثيراً بتحديد قيم المجهول (أو المجاهيل) التي تجعل جملة خبرية صائبة، كما رأيت، وكما سترى مستقبلاً عند دراسة المعادلات والمتباينات (المتراجحات).

استناداً على ما سبق فإننا نميز بين نوعين مختلفين من الجمل الخبرية ونضع ضابطاً لها في التعريف الآتي :

تعريف (١ـ١)
كل جملة خبرية ، يمكن الحكم عليها بأنها صائبة أو خاطئة ، تسمى عبارة . وكل جملة خبرية، تتضمن مجهولاً أو أكثر، تسمى عبارة مفتوحة.

العبارة البسيطة والعبارة المركبة :

إن العبارة ﴿ إِنَّ ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلْمُحْسِنِينَ ﴾ عبارة بسيطة لأنها تحمل إلينا خبراً واحداً. في حين أن العبارة ﴿ مَا عِندَكُمْ يَنفَدُ وَمَا عِندَ ٱللَّهِ بَاقٍ ﴾ عبارة مركبة لأنها تحمل إلينا خبرين : الأول : « ما عندكم ينفد » والثاني : «ماعند الله باق» أعط مثالاً لعبارة تحمل أكثر من خبرين.

تعريف (١ـ٢)
كل عبارة تحمل خبراً واحداً تسمى عبارة بسيطة. وكل عبارة تحمل أكثر من خبر تسمى عبارة مركبة

١ ـ٣ جدول الصدق :

بفرض أن أ عبارة (سواء كانت بسيطة أو مركبة) فإنها كما رأينا، إما أن تكون صائبة أو خاطئة ولا يمكن أن تكون صائبة وخاطئة في وقت واحد.

إذا كانت العبارة أ صائبة فنرمز لذلك بالرمز ص وإذا كانت خاطئة فنرمز لذلك بالرمز خ، ونلخص ما تقدم بالجدول (١ـ١) والذي نسميه جدول الصدق للعبارة أ . كما نسمي كلاً من ص وَخ قيمة الصدق للعبارة أ .

نفي العبارة.

إن العبارة : تطلع الشمس من المشرق عبارة صائبة،
ونفيها هي العبارة : لا تطلع الشمس من المشرق وهي عبارة خاطئة.

أ
ص
خ

جدول (١ـ١)

كما أن العبارة : الخوارزمي عالم أمريكي هي عبارة خاطئة نفيها هي العبارة : الخوارزمي ليس عالماً أمريكياً أو ليس صحيحاً أن الخوارزمي عالم أمريكي وهذه عبارة صائبة. مما تقدم نقبل القاعدة التالية :

نفي العبارة الصائبة عبارة خاطئة والعكس صحيح،أي نفي العبارة الخاطئة عبارة صائبة.

وإذا كان أ رمزاً لعبارة ما فإن رمز نفي هذه العبارة هو « ~ أ» (ويقرأ نفي أ) ويكون الجدول (١ـ٢) هو جدول الصدق للعبارتين أ وَ~ أ معاً.

أ	~ أ
ص	خ
خ	ص

جدول (١ـ٢)

تمارين (١ـ١)

عين العبارات في الجمل من (١ ـ ١٥) مع ذكر السبب عندما لا تكون الجملة عبارة :

١ ـ المؤمنون إخوة.

٢ ـ أَطِع والديك.

٣ ـ السعيد من اتعظ بغيره.

٤ ـ يا علي أكرم ضيفك.

٥ ـ الحوت من الثدييات.

٦ ـ النيل من أنهار آسيا.

٧ ـ ما أحسن الصبر عند الشدائد !

٨ ـ لا تنه عن خلق وتأتي مثله.

٩ ـ يا ليت نفسي تحدثني بالجهاد في سبيل الله.

١٠ ـ ٣ س + ١ = ٧ ، حيث س عدد طبيعي.

١١ ـ تُمدُّ الشمسُ الأرض بالدفء.

١٢ـ مَا أَنْتَ بِكَسُول.

١٣ـ يريد اللهُ بكم اليُسر ولا يريد بكم العسر .

١٤ ـ البر حسن الخلق والإثم ما حاك في نفسك .

١٥ ـ مساحة المثلث لا تساوي نصف حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه.

١٦ ـ بَيِّن العبارات الصائبة والعبارات الخاطئة في التمارين (١ـ١٥).

١٧ ـ توجد عبارة مفتوحة في مجموعة التمارين (١ـ١٥) عينها. ثم حدِّد متى تكون صائبة ومتى تكون خاطئة ؟

١٨ ـ اكتب نفي كل عبارة وردت في التمارين ، (٣) ، (٦) ، (١١) ، (١٥) . ومن ثم عين قيمة الصدق لها (يعني إذا كانت العبارة بعد نفيها صائبة فاكتب أمامها الحرف ص وإذا كانت العبارة بعد نفيها خاطئة فاكتب أمامها الحرف خ).

١٩ ـ اكتب نفي العبارة المفتوحة التي حصلت عليها في التمرين (١٧). ثم حدد متى تكون صائبة ومتى تكون خاطئة ؟

٢٠ ـ استخرج عبارتين مركبتين من بين العبارات الواردة في التمارين (١ـ١٥).

١ـ٤ أدوات الربط :

لربط جملة مع جملة أخرى تحتاج عادة إلى رابط بينهما وأدوات الربط في اللغة العربية كثيرة منها، على سبيل المثال، حروف العطف وأدوات الشرط.

إن أدوات الربط التي سندرسها في هذا الباب هي :

١ ـ حرف العطف «وَ» ويرمز له بالرمز «$\wedge$».

٢ ـ حرف العطف «أو» ويرمز له بالرمز «$\vee$».

٣ ـ أداة الشرط « إذا ...... فإن » ويرمز لها بالرمز $\longrightarrow$.

٤ ـ أداة الشرط «إذا وفقط إذا » ويرمز لها بالرمز $\longleftrightarrow$.

لاحظ أن أداة الشرط الأخيرة غير شائعة الاستعمال في اللغة (بهذا النص ولكن الرياضيين يهتمون بها).

ومن أمثلة العبارات المركبة المرتبطة بالأدوات السابقة ما يلي :

١ ـ يريد الله بكم اليسر ولا يريد بكم العسر .

٢ ـ ليس عليكم جناح أن تأكلوا جميعًا أو أشتاتًا.
٣ ـ إذا توقف قلب الإنسان عن النبض فإنه يموت.
٤ ـ يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كانت زواياه متساوية.

العبارات المركبة السابقة كل منها مكونة من عبارتين بسيطتين ارتبطتا بواحدة من أدوات الربط السابق ذكرها. حاول أن تكتب في كل حالة العبارتين البسيطتين. وإذا رمزت للعبارة البسيطة الأولى بالحرف أ في كل حالة وللعبارة البسيطة الثانية بالحرف ب فأعد كتابة الأمثلة الأربعة مستخدماً الحرفين أ و ب ورموز أدوات الربط .

ستجد اجابتك على الترتيب هي (١) أ ∧ ب (لأنك رمزت للعبارة «يريد الله بكم اليسر» بالحرف أ وللعبارة «لايريد بكم العسر» بالحرف ب والرابط بينهما حرف العطف وَ فالعبارات المركبة إذن هي
(١) أ ∧ ب (٢) أ ∨ ب (٣) أ ⟵ ب (٤) أ ⟷ ب.

ولما كان أحد الأهداف الأساسية في الرياضيات هو تحديد قيمة الصدق لعبارة ما سواء كانت بسيطة أو مركبة، فإننا سنبين ما اتفق عليه الرياضيون بخصوص تحديد قيم الصدق للعبارات المركبة. وحيث إن العبارة المركبة تتكون من عبارات بسيطة وأدوات ربط بينها، كما رأينا، فإن قيم الصدق لعبارة مركبة تعتمد على كل من :
١ـ قيم الصدق للعبارات البسيطة المكونة للعبارة المركبة.
٢ـ أداة أو أدوات الربط المستعملة في هذه العبارة.

والآن لنفرض أن أ ، ب رمزان لعبارتين مختلفتين ... نعرف أن عدد قيم الصدق المختلفة لكل من العبارتين بمفردها اثنان، انظر الجدول (١ـ١). ولكن حاول أن تعرف عدد قيم الصدق المختلفة للعبارة المركبة من أ ، ب معاً.

إنك ستكتشف أربع حالات مختلفة، لقيم الصدق للعبارة المركبة من أ ، ب معاً، هي :
الحالة الأولى : العبارة أ صائبة والعبارة ب صائبة.
الحالة الثانية : العبارة أ صائبة والعبارة ب خاطئة.
الحالة الثالثة : العبارة أ خاطئة والعبارة ب صائبة.
الحالة الرابعة : العبارة أ خاطئة والعبارة ب خاطئة.

	أ	ب
(١)	ص	ص
(٢)	ص	خ
(٣)	خ	ص
(٤)	خ	خ

جدول (١ـ٣)

إن الجدول (١ـ٣) يمثل الحالات الأربع السابقة.

بنفس الفكرة لو كانت أ ، ب ، جـ ثلاث عبارات مختلفة فإن عدد قيم الصدق الممكنة للعبارة المركبة من العبارات الثلاث معاً هو ثمان.. حاول بنفسك أن تكتب هذه الحالات الثمان. ومن ثم ضعها في جدول مماثل للجدول (١ـ٣).

الرابط «وَ»

إذا استخدم الرابط «وَ» بين عبارتين أ ، ب ليعطي العبارة المركبة أ $\wedge$ ب فإن الرياضيين قد اتفقوا على التعريف (أو القاعدة) الآتي :

تعريف (١ـ٣) :
تكون العبارة المركبة أ $\wedge$ ب صائبة في حالة واحدة فقط، هي الحالة التي تكون فيها العبارة أ والعبارة ب صائبتين في وقت واحد.

مثال (١ ـ ١)

لنفرض أن :

أ تعني : يحب المؤمن الجهاد .

ب تعني : لا يكرة لقاء العدو.

جـ تعني : لا يحب المؤمن الجهاد (لاحظ أن جـ هي ~ أ).

د تعني : يكره لقاء العدو (لاحظ أن د هي ~ ب).

حدد قيمة الصدق لكل من العبارات المركبة الآتية :

(١) أ $\wedge$ د (٢) جـ $\wedge$ د (٣) أ $\wedge$ ب (٤) جـ $\wedge$ ب.

الحـــلّ :

نعلم أن أ عبارة صائبة وكذلك ب عبارة صائبة في حين أن جـ عبارة خاطئة وكذلك د عبارة خاطئة إذن استناداً على التعريف (١ـ٣) نجد أن العبارات المركبة جميعها خاطئة ما عدا العبارة المركبة أ $\wedge$ ب فهي صائبة.

الــرابـــط « أو »

إذا استخدم الرابط « أو » بين عبارتين أ ، ب ليعطي العبارة المركبة أ $\vee$ ب فإن الرياضيين قد اتفقوا على التعريف الآتي :

تعريف (١ ـ ٤)

تكون العبارة المركبة أ $\vee$ ب خاطئة في حالة واحدة فقط ، هي الحالة التي تكــون فيـها العبارة أ والعبارة ب خاطئتين في وقت واحد.

مثال (١ ـ ٢)

لنفرض أن :

أ تعني : العسل من النحل.

ب تعني : عدد الخلفاء الراشدين ثلاثة.

جـ تعني : الجمل أسرع وسائل المواصلات.

د تعني : الهواء ضروري للحياة.

عين قيمة الصدق لكل من العبارات المركبة الآتية :

(١) أ $\vee$ ب (٢) أ $\vee$ د (٣) ب $\vee$ د (٤) ب $\vee$ جـ (٥) جـ $\vee$ د

الحـــلّ :

بما أن كلاً من العبارتين أ ، د صائبة وأن كلاً من العبارتين ب ، جـ خاطئة ، إذاً استناداً إلى التعريف (١ـ ٤) نجد أن العبارات المركبة جميعها صائبة ما عدا العبارة المركبة ب $\vee$ جـ فهي خاطئة.

الــرابــط « إذا ....فإن» :

إذا استخدمنا هذا الرابط بين عبارتين أ ، ب لنحصل على العبارة المركبة أ $\longrightarrow$ ب (وتقرأ إذا كانت أ فإن ب) فإن الرياضيين اتفقوا على التعريف الآتي :

تعريف (١ ـ ٥)

تكون العبارة المركبة أ ⟵ ب خاطئة في حالة واحدة فقط، هي الحالة التي تكون فيها العبارة أ صائبة والعبارة ب خاطئة.

مثال (١ ـ ٣)

لنفرض أن :

أ تعني : الشمس أكبر من القمر.

ب تعني : القمر أصغر من الأرض.

انفِ كلاً من العبارتين ومن ثم عين قيمة الصدق لكل عبارة فيما يلي :

(١) أ (٢) ب (٣) ~ أ (٤) ~ ب (٥) أ ⟵ ب (٦) ~ أ ⟵ ب

(٧) أ ⟵ ~ ب (٨) ~ أ ⟵ ~ ب .

الحـــلّ :

~ أ هي العبارة : ليست الشمس أكبر من القمر. أما ~ ب فهي العبارة ؛ ليس القمر أصغر من الأرض.

إن العبارة أ صائبة وبالتالي فإن نفيها (أي ~ أ) عبارة خاطئة. وبالمثل ب عبارة صائبة وبالتالي تكون ~ ب عبارة خاطئة. وباستخدام التعريف (١ـ ٥) نستطيع الحكم على العبارات المركبة بأنها كلها صائبة ما عدا العبارة : أ ⟵ ~ ب فهي خاطئة. (لاحظ أننا إذا وصفنا عبارة ما بأنها صائبة فإن قيمة الصدق لها هي (ص)؛ وبالعكس إذا وصفنا عبارة ما بأنها خاطئة فإن قيمة صدقها هي «خ»)،

تدريب (١ ـ ١)

اكتب العبارة أ ⟵ ~ ب بصورة لفظية.

الرابط «إذا وفقط إذا»

إذا كانت أ ، ب أي عبارتين فإنك تعرف قيم الصدق الممكنة لكل من العبارتين المركبتين : (١) أ ← ب (٢) ب ← أ ، وذلك وفق التعريف (١ـ ٥) والآن لنستخدم الرابط «وَ» بين العبارتين (١)، (٢) لنحصل على العبارة المركبة) (٣) (أ ← ب) ∧ (ب ← أ)، والتي تقرأ : إذا كانت أ فإن ب وَ إذا كانت ب فإن أ ورغبة في الاختصار نكتب العبارة (٣) بالصورة (٤)

أ ⟷ ب أي أن :

أ ⟷ ب تعني (أ ← ب) ∧ (ب ← أ).

ونستنتج أن للعبارتين (٣)،(٤) قيم الصدق نفسها. وبالتالي فلا داعي لإعطاء تعريف لقيم الصدق عند استخدام الرابط «إذا وفقط إذا» لأننا نحصل على هذه القيم بواسطة الرابط «إذا ... فإن» والرابط «وَ» اللذين سبقت دراستهما .

لنوضح ما سبق بالمثال الآتي :

مثال (١ ـ ٤)

لنفرض أن أ ، ب عبارتان صائبتان، حيث :

أ تعني : س عدد زوجي .

ب تعني : س يقبل القسمة على ٢.

انف كلاً من أ ، ب ثم أوجد قيمة الصدق لكل عبارة مما يلي :

(١) أ ⟷ ب (٢) أ ⟷ ~ ب (٣) ~ أ ⟷ ب (٤) ~ أ ⟷ ~ ب

الحـــل :

~ أ تعني : س عدد غير زوجي، وهي عبارة خاطئة، لماذا ؟

~ ب تعني : س لا يقبل القسمة على ٢، وهي عبارة خاطئة، لماذا ؟

١ ـ أ ⟷ ب تعني (أ ← ب) ∧ (ب ← أ) وهي عبارة صائبة، لأن كلاً من العبارتين : أ ← ب، ب ← أ صائبة وفق التعريف (١ـ٥).

٢ ـ أ ⟷ ~ ب تعني (أ ← ~ ب) ∧ (~ ب ← أ) وهي عبارة خاطئة ، لأن العبارة أ ← ~ ب خاطئة.

٣ ـ ~ أ ⟷ ب تعني (~ أ ⟵ ب) ∧ (ب ⟵ ~ أ) وهي عبارة خاطئة، لأن ب ⟵ ~ أ خاطئة.

٤ ـ ~ أ ⟷ ~ ب تعني (~ أ ⟵ ~ ب) ∧ (~ ب ⟵ ~ أ) وهي عبارة صائبة لأن كلاً من العبارتين ~ أ ⟵ ~ ب، ~ ب ⟵ ~ أ صائبة، لماذا؟

نستخلص من هذا المثال أنه إذا كانت أ ، ب أي عبارتين فإن قيمة الصدق للعبارة المركبة أ ⟷ ب صائبة في حالتين، هما عندما تكون العبارتان أ ، ب صائبتين معاً أو خاطئتين معاً، وخاطئة فيما عدا ذلك .

نختم هذا البند بتقديم الجدول (١ ـ ٤) والذي يلخص ما توصلنا إليه بخصوص قيم الصدق الممكنة لعبارة مركبة من عبارتين (أ ،ب مثلاً) رُبِطَتا بأحد الروابط الأربعة السابقة.

	أ	ب	أ ∧ ب	أ ∨ ب	أ ⟵ ب	أ ⟷ ب
الحالة الأولى	ص	ص	ص	ص	ص	ص
الحالة الثانية	ص	خ	خ	ص	خ	خ
الحالة الثالثة	خ	ص	خ	ص	ص	خ
الحالة الرابعة	خ	خ	خ	خ	ص	ص
	١	٢	٣	٤	٥	٦

جدول (١ـ٤)

بتأمل الجدول (١ـ٤) نجد أن :

العمودين (١) ، (٢) مع العمود (٣) تعطي الحالات المختلفة لقيم الصدق للعبارة المركبة أ ∧ ب.

العمودين (١) ، (٢) مع العمود (٤) تعطي الحالات المختلفة لقيم الصدق للعبارة المركبة أ ∨ ب.

العمودين (١) ، (٢) مع العمود (٥) تعطي الحالات المختلفة لقيم الصدق للعبارة المركبة أ ⟵ ب.

العمودين (١) ، (٢) مع العمود (٦) تعطي الحالات المختلفة لقيم الصدق للعبارة المركبة أ ⟷ ب .

إن الجدول (١ ـ ٤) مهم جداً، لأننا بوساطته نستطيع بشكل سريع وسهل أن نحدد قيمة الصدق لأي عبارة مركبة.

مثال (١ ـ ٥)

لنفرض أن :

أ تعني : الرياض عاصمة المملكة العربية السعودية.

ب تعني : الدمام ميناء على البحر الأحمر .

ج تعني : القاهرة عاصمة سوريا.

د تعني : المسجد الحرام في مكة المكرمة.

عين قيمة الصدق لكل عبارة فيما يلي :

(١) أ ∧ ب　　(٢) أ ∨ جـ　　(٣) ب ⟵ د　　(٤) ب ⟷ جـ

(٥) أ ∧ د　　(٦) ب ∨ جـ　　(٧) أ ⟵ جـ　　(٨) جـ ⟷ د

الحـــلّ :

مِنْ معلوماتنا الجغرافية نعلم أن قيمة صدق كل من أ ، د هي «ص» في حين أن قيمة الصدق لكل من ب، جـ هي «خ».

والأن إستناداً إلى الجدول (١ـ ٤) نجد أن ؛

١ ـ قيمة الصدق للعبارة أ ∧ ب هي «خ» (انظر إلى تقاطع سطر الحالة الثانية مع العمود (٣) من الجدول (١ ـ ٤)).

٢ ـ قيمة الصدق للعبارة أ ∨ جـ هي «ص» (انظر إلى تقاطع سطر الحالة الثانية مع العمود (٤) من الجدول (١ ـ ٤)) .

٣ ـ قيمة الصدق للعبارة ب ⟵ د هي «ص» (انظر إلى تقاطع سطر الحالة الثالثة مع العمود (٥) من الجدول (١ ـ ٤)).

٤ ـ قيمة الصدق للعبارة ب ⟷ جـ هي «ص» (انظر إلى تقاطع سطر الحالة الرابعة مع العمود (٦) من الجدول (١ ـ ٤)).

وهكذا تكمل الفقرات الباقية بالطريقة ذاتها.

تمارين (١ ـ ٢)

عيِّن العبارات الصائبة فيما يلي :

١ ـ لا نهتم في الرياضيات بتحديد الصواب والخطأ لعبارة ما.

٢ ـ إن الله يأمر بالعدل والإحسان وإيتاء ذي القربى.

٣ ـ العبارة الواردة في التمرين (٢) مكونة من أربع عبارات بسيطة.

٤ ـ أدوات الربط التي ركّزنا على دراستها هي أربع أدوات فقط.

٥ ـ تحديد قيمة الصدق لعبارة مركبة لا تعتمد على أداة الربط المستخدمة.

٦ ـ تحديد قيمة الصدق لعبارة مركبة تعتمد على قيم الصدق لمركباتها البسيطة فقط.

٧ ـ إذا كانت ب ترمز لعبارة مركبة صائبة فإن نفي ب (~ ب) عبارة خاطئة.

أوجد العبارات البسيطة المكونة لكل عبارة مركبة فيما يلي :

٨ ـ إنّا نحن نزّلنا الذكر وإنّا له لحافظون.

٩ ـ الصلاة والزكاة والحج من أركان الإسلام.

١٠ ـ لا يحب الناس الرجل المتكبر أو المنافق.

١١ ـ يستفيد من جالس العلماء أو جالس الأخيار أو جالس العقلاء.

١٢ ـ إذا كان س = ١ فإن $س^{٢}$ ـ ١ = صفراً.

١٣ ـ إذا كان ٢ × ٣ = ٦ فإن ٢ +٣ ≠ ٥.

١٤ ـ تتقدم الأمم إذا وفقط إذا أخذت بالعلم .

١٥ ـ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{-١} = \frac{٣}{٢} \longleftrightarrow \left(\frac{٢}{٣}\right)^{٢} = \frac{٩}{٤}$

١٦ ـ اكتب التعابير الواردة في التمارين (٨) ـ (١٥) على صورة رمزية .

١٧ ـ عين قيمة الصدق للعبارات المركبة الواردة في التمارين (٨) ـ (١٥).

١٨ ـ العبارتان الآتيتان صائبتان :

الأولى : س = ٢ جذر للمعادلة (س– ٢) (س–٣) = صفراً.

الثانية : س = ٣ جذر للمعادلة (س–٢) (س – ٣) = صفراً.

اذكر العبارات الصائبة فيما يأتي :

(أ) المعادلة (س–٢) (س–٣) = ٠ جذراها ٢ و٣.

(ب) المعادلة (س–٢) (س – ٣) = ٠ أحد جذريها ٢ أو ٣.

(جـ) المعادلة (س–٢) (س – ٣) = ٠ أحد جذريها ١ أو ٣.

(د) المعادلة (س – ٢) (س–٣) = ٠ جذراها – ١ وَ ٤.

(هـ) المعادلة (س–٢) (س–٣) = ٠ أحد جذريها – ١ أو ٤.

أنشئ جداول الصدق للتعابير الآتية :

١٩ـ أ ∧ ~ ب

٢٠ـ أ ∧ (أ ∨ ب)

٢١ـ ~ (أ ∧ ب)

٢٢ـ ~ أ ← ب

٢٣ـ أ ← ~ ب

٢٤ـ (أ ∧ ب) ∧ جـ

٢٥ـ أ ∧ (ب ∧ جـ).

إذا كانت أ تعني : نزل المطر، ب تعني : اخضرَّت الأرض فاكتب الترجمة الكلامية لما يلي :

٢٦ـ أ ∧ ب

٢٧ـ ~ أ ∧ ب

٢٨ـ أ ↔ ب

٢٩ـ أ ∨ ب

٣٠ـ ~ أ ← ب

١ ـ ٥ العبارات المتكافئة

لنفرض أن :

أ تعني : س عدد زوجي.

ب تعني : س عدد يقبل القسمة على ٢.

من معلوماتنا الرياضية نعلم أن هاتين العبارتين إما أن تكونا صائبتين معاً أو خاطئتين معاً، إذ يستحيل ، مثلاً، أن تكون العبارة أ صائبة والعبارة ب خاطئة في الوقت نفسه. نقول في مثل هذه الحالة إن العبارتين أ ، ب متكافئتان. وبشكل عام نقدم التعريف الآتي :

تعريف (١ ـ ٦)

نقول إن العبارتين أ ، ب متكافئتان منطقياً، وللاختصار متكافئتان، إذا كان لهما قيم الصدق نفسها، ونرمز لذلك بالرمز أ $\equiv$ ب

(وتُقرأ أ تكافئ ب).

ينتج عن هذا التعريف أن نفي عبارتين متكافئتين يعطي عبارتين متكافئتين أيضاً . أي إذا كانت أ $\equiv$ ب فإن ~ أ $\equiv$ ~ ب.

واستخدام فكرة تكافؤ العبارات عظيم الأهمية في البراهين الرياضية، فهي تمكننا عند برهان نظرية ما من الانتقال من عبارة إلى عبارة مكافئة لها في عدة خطوات تنتهي بالمطلوب اثباته، كما سترى ذلك إن شاء الله.

نظرية (١ـ١)

إذا كانت أ ، ب أي عبارتين فإن

١ ـ أ $\equiv$ ~ (~ أ).

٢ ـ أ $\leftarrow$ ب $\equiv$ ~ ب $\leftarrow$ ~ أ $\equiv$ ~ أ $\vee$ ب

٣ ـ ~ (أ $\leftarrow$ ب) $\equiv$ أ $\wedge$ ~ ب

البرهـــان :

١ ـ إن أ $\equiv$ ~ (~ أ) ، لأن لهما قيم الصدق ذاتها، كما يظهر في الجدول (١ ـ ٥).

٢ ـ إن التكافؤ صحيح بين العبارات الثلاث لأن لكل

أ	~ أ	~(~أ)
ص	خ	ص
خ	ص	خ

جدول (١ـ ٥)

منها قيم الصدق ذاتها، كما يظهر في الأعمدة :
(٥) ، (٦) ،(٧) من الجدول (١ ـ ٦).

أ	ب	~أ	~ب	أ ← ب	~ب ← ~أ	~أ ∨ ب	~(أ ← ب)	أ ∧ ~ب
ص	ص	خ	خ	ص	ص	ص	خ	خ
ص	خ	خ	ص	خ	خ	خ	ص	ص
خ	ص	ص	خ	ص	ص	ص	خ	خ
خ	خ	ص	ص	ص	ص	ص	خ	خ
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

جدول (١ـ٦)

٣ـ إن التكافؤ صحيح بين العبارتين لأن لهما قيم الصدق نفسها كما يظهر في العمودين (٨)، (٩) من الجدول (١ـ٦).

تدريب (١ ـ ٢)

١ ـ تحقق أن أ ∧ ب ≡ ب ∧ أ وأن أ ∨ ب ≡ ب ∨ أ (خاصة الإبدال).

٢ـ تحقق أن أ ← ب ≢ ~أ ← ~ ب، حيث ≢ تعني لا يكافئ.

نظرية (١ ـ ٢)

لأي عبارتين أ ، ب فإن :

١ ـ ~ (أ ∧ ب) ≡ ~أ ∨ ~ ب .

٢ـ ~ (أ ∨ ب) ≡ ~أ ∧ ~ ب .

البرهـــان

١ ـ استخدم الأعمدة الأربعة الأولى من الجدول (١ ـ ٦) ثم أضف إليها ثلاثة أعمدة جديدة ولتكن مثلاً أرقامها (٥) ، (٦) ، (٧) .. ضع في العمود (٥) العبارة المركبة أ ^ ب وفي العمود (٦) العبارة ~ (أ ^ ب)، أما في العمود (٧) فضع العبارة المركبة ~أ v ~ ب.

عين قيم الصدق لهذه العبارات، تجد أن العمودين (٦) ، (٧) متطابقان، أي لهما قيم الصدق نفسها ومن ثم فإن ~ (أ ^ ب) ≡ ~أ v ~ ب.

٢ ـ استخدم فكرة مشابهة تماماً لما فعلته في الفقرة (١).

مثال (١ ـ ٦)

انفِ كل عبارة فيما يلي ومن ثم عيِّن قيمة الصدق لها :

١ ـ لا يحب الناس الرجل المتكبر .

٢ ـ الشمس كوكب أو القمر نجم .

٣ ـ ٧ > ٦ وَ ٨ = ٢ × ٤

٤ ـ إذا زاد طولا ضلعي المستطيل فإن مساحته تزيد .

الحـــلّ :

١ ـ يحب الناس الرجل المتكبر.

٢ ـ ليس صحيحاً أن « الشمس كوكب أو القمر نجم » أو نستخدم العبارة المكافئة لها حسب الفقرة (٢) من النظرية (١ ـ ٢) وهي : «ليست الشمس كوكباً وَليس القمر نجماً ».

٣ ـ ليس صحيحاً أن « ٧ > ٦ وَ ٨ = ٢ × ٤ » أو حسب الفقرة (١) من النظرية (١ـ٢) نكتب : ٧ ⩽ ٦ أو ٨ ≠ ٢ × ٤ .

٤ ـ ليس صحيحاً أنه « إذا زاد طولا ضلعي المستطيل فإن مساحته تزيد » أو نستخدم العبارة المكافئة لها، حسب الفقرة(٣) من النظرية (١ـ١) وهي : زاد طولا ضلعي المستطيل ولم تزد مساحته.

بما أن العبارات (١) ،(٣) ،(٤) صائبة فإن نفي كل منها عبارة خاطئة ... أما العبارة (٢) فهي ، كما تعلم، خاطئة ولذلك فإن نفيها عبارة صائبة.

١ ـ ٦ الاقتضـــاء

إن الاقتضاء الرياضي، أو اختصاراً، الاقتضاء من الأمور التي يكثر استخدامها في البراهين الرياضية، وبخاصة عند استخدام العبارة الشرطية.

لنفرض أن :

أ تعني : ٨ عدد زوجي.

ب تعني : ٢ لا يقسم العدد ٨

إن العبارة الشرطية المركبة أ ⟵ ب خاطئة، كما عرفنا، في حالة واحدة فقط، هي الحالة الثانية (انظر الجدول (١ ـ ٤) السطر الثاني. العمود «٥») وهي الحالة التي تكون فيها العبارة أ صائبة والعبارة ب خاطئة، أي العبارة الشرطية المركبة الآتية :

إذا كان ٨ عدداً زوجياً فإن ٢ لا يقسم ٨

حاول أن تؤيد خطأ هذه العبارة المركبة.. في العبارة الشرطية المركبة « أ ⟵ ب» السابقة إذا استبعدنا الحالة الثانية وأبقينا الحالات الثلاث الأخرى، التي في كل منها تكون العبارة الشرطية المركبة أ ⟵ ب صائبة « اكتب هذه الحالات الثلاث رمزياً ولفظياً» فإننا نقول : إن العبارة أ تقتضي العبارة ب، ونرمز لذلك بالرمز أ ⟸ ب (يقرأ أ تقتضي ب).

تعريف (١ ـ ٧)

لأي عبارتين أ ، ب نقول : إن أ ⟹ ب إذا كانت العبارة الشرطية أ ⟵ ب صائبة دائماً.

ملحوظـات (١ ـ ١)

١ ـ إذا تحقق التعريف (١ ـ ٧) لأي عبارتين أ ، ب قلنا : إن الاقتضاء أ ⟸ ب متحقق أو صائب. أما إذا لم يتحقق التعريف فإننا نقول : إن الاقتضاء غير متحقق أو خاطئ ونكتب حينئذ أ ⇍ ب (وتقرأ أ لا تقتضي بالضرورة ب).

٢ ـ بما أن أ ⟵ ب ≡ ~ب ⟵ ~أ ، حسب (٢) من النظرية (١ ـ ١)، فإن الاقتضاء « أ ⟸ ب » متحقق إذا أثبتنا أن العبارة الشرطية ~ ب ⟵ ~أ صائبة.

٣ ـ في العبارة الشرطية أ ⟵ ب تسمى أ ، أحياناً، المقدمة (أو المعطيات أو المفروض) وتسمى ب النتيجة (أو المطلوب). وإذا كان أ ⟸ ب متحققاً قلنا : إن تحقق أ شرط كاف لتحقق ب.

٤ـ قد يكون أ ⟸ ب متحققاً في حين أن ب ⟸ أ غير متحقق ، ومثال ذلك :

بفرض أن أ تعني : طارق طالب في الجامعة، ب تعني : طارق أتمَّ المرحلة الثانوية. يكون الاقتضاء « أ ⟸ ب» متحققاً، أي أن : طارق طالب في الجامعة يقتضي أن طارق أتمَّ المرحلة الثانوية. في حين أن الاقتضاء « ب ⟸أ » غير متحقق لأن كون طارق أتمَّ المرحلة الثانوية لا يقتضي بالضرورة كون طارق طالباً في الجامعة. نقول في هذه الحالة وأمثالها : إن تحقق أ شرط كاف لتحقق ب في حين أن تحقق ب شرط غير كاف لتحقق أ . وقد نعبر عن ذلك بصورة أكير اختصاراً فنقول : إن تحقق أ شرط كاف وغير لازم لتحقق ب.

٥ ـ إذا كان أ ⟸ ب متحققاً وكان ب ⟸ أ متحققاً أيضاً، فإننا نرمز لذلك بالرمز أ ⟺ ب، ونقول عندئذ : إن العبارة أ تكافئ العبارة ب (أي أن الرمزين : ⟺ ، ≡ يصبحان لهما دلالة واحدة). ويمكن أن نعبرٍ عن ذلك بالقول : إن تحقق أ شرط لازم وكاف لتحقق ب. (بَيِّن أن التكافؤ « أ ⟺ ب» يحدث فقط عندما تكون العبارتان الشرطيتان : أ ⟵ ب، ب ⟵ أ ،صائبتين معاً أو خاطئتين معاً).

٦ ـ يكون التكافؤ أ ⟺ ب غير متحقق (ويكتب أ ⇎ ب ويقرأ أ لا يكافئ ب) إذا كان أ ⇏ ب أو ب ⇏ أ .

المثال الآتي يوضح كلاً من (٥) ، (٦) من الملحوظات (١ ـ ١).

مثال (١ ـ ٧)

بفرض س عدد حقيقي ، أي من التكافؤين متحقق؟

١ ـ س = ٣ ⟺ ٢س = ٦

٢ ـ س = ٣ ⟺ س^{٢} = ٩

الحـــلّ :

١ ـ س = ٣ ⟸ ٢س = ٦ متحقق، لأنه بضرب طرفيْ المقدمة (س=٣) في العدد ٢ نحصل على النتيجة (٢س = ٢ × ٣).

كذلك ٢س = ٦ ⇐ س =٣ متحقق، لأنه بقسمة طرفيْ المقدمة(٢س = ٦) على العدد ٢ نحصل على النتيجة (س =٣).

إذن س = ٣ ⇔ ٢س =٦ صائب. وهذا يعني أن س = ٣ شرط لازم وكاف لكون ٢س = ٦ .

٢ ـ س=٣ ⇐ $س^{٢}$ = ٩ متحقق، لأنه بتربيع طرفي المقدمة (س=٣) نحصل على النتيجة (س.س=٣ × ٣).

ولكن $س^{٢}$=٩ ⇐ س= ٣ قد لا يتحقق، لأنه بجذر طرفي المقدمة ($س^{٢}$ = ٩) نحصل على قيمتين هما س = ٣ أو س = −٣.

وهذا يعني أن $س^{٢}$ = ٩ ⇍ س =٣. وبالتالي فإن :

س=٣ ⇔ $س^{٢}$ =٩ خاطئ، أي أن : س = ٣ ⇎ $س^{٢}$ =٩.

وهذا يعني أن س =٣ شرط كاف ولكنه غير لازم لكون $س^{٢}$ =٩ .

١ ـ ٧ طرائق البرهان

لقد عَرَّفنا العبارة، سواء أكانت بسيطة أم مركبة، بأنها الجملة الخبرية التي يمكن الحكم عليها بأنها صائبة أو خاطئة، ولا تكون صائبة وخاطئة في آن واحد. وحتى يحكم الإنسان على عبارة ما بالصواب أو بالخطأ فلابد أن يكون على دراية تامة بما تعنيه كل كلمة تدخل في تركيبها.. إن من يتحدث باللغة العربية سيحكم بصواب العبارة « الوردة حمراء » إذا كان يعرف المعنى المقصود بالكلمتين « الوردة » و «حمراء» كما أنه سيحكم بخطأ العبارة « الشمس كوكب » إذا كان يعرف المعنى المقصود بالكلمتين : «الشمس» و«كوكب». (إذا لم تستطع أن تحكم على عبارة ما بالصواب أو بالخطأ، فهل يصح لك أن تقول بأن هذه ليست عبارة ؟).

إن تحديد الصواب والخطأ (قيمة الصدق) لعبارة ما أمر في غاية الأهمية، لا في الرياضيات فحسب، بل في جميع المعارف وفي كل شؤون البشر.فنحن الأمة الإسلامية جميع العبارات التي نحتاجها في عباداتنا وفي بيعنا وشرائنا وتزاوجنا .. إلخ نحكم عليها بالصواب أو بالخطأ وفق ما ورد في القرآن الكريم والأحاديث الصحيحة، حيث إن كل عبارات القرآن وعبارات الرسول صائبة. فيكون الحكم بموجبها بمثابة برهان على صحة حكمنا. فمثلاً العبارة « يجوز أن يَعتَنق الإنسان ديناً غير دين الإسلام » عبارة خاطئة، وبرهاننا عليها قوله تعالى ﴿ وَمَن يَبْتَغِ غَيْرَ ٱلْإِسْلَٰمِ دِينًا فَلَن يُقْبَلَ مِنْهُ ﴾ (سورة آل عمران آية ٨٥). (حاول أن تورد أمثلة مشابهة وتحكم عليها وفق الكتاب أو السنة).

إن كلاً من العبارتين (يتمدد الحديد بالحرارة) وَ« لا يصلح ثمر النخل بدون تأبير :"تلقيح" » صائبة والبرهان على ذلك التجربة والمشاهدة.

إن العبارة « كل مستقيمين في المستوي إمَّا متوازيان أو متقاطعان في نقطة واحدة أو منطبقان» صائبة، ولكن لاحظ أن حكمنا ناتج عن معرفة مُسْبَقَة مبَنْيةٌ على تعريف توازي مستقيمين وتقاطعهما وانطباقهما إلاَّ أننا لا نستطيع وضع تعريف للكلمات : مستقيم، مستوي، نقطة، وكلها ظهرت في العبارة السابقة. إن هذه الكلمات وأمثالها مصطلحات رياضية ندركها دون تعريف ونسميها مفاهيم أولية. وإنطلاقاً من هذه المفاهيم نعرِّف القطعة المستقيمة ونصف المستقيم والقطاع الزاوي والمثلث والمربع ... إلخ.

إن الحكم على صواب أو خطأ عبارة ما يستنتج أحياناً من صواب أو خطأ عبارة معلومة لدينا قبلها، وربما تكون هذه العبارة الثانية محكوم عليها وفق معرفة حكم سابق لعبارة ثالثة وهكذا، حتى نصل إلى عبارة نَقبَل صوابها دون برهان. تسمى هذه العبارات التي نقبل صوابها دون تعليل مُسَلَّمات (أو موضوعات أو مصادرات أو بديهات) . ومن أمثلة هذه المسلَّمات :

(أ) عبارات القرآن الكريم.

(ب) العبارات التي بُنِيت على التجربة العلمية والمشاهدة.

(جـ) العبارة الهندسية الأساسية التي لا نجد ما يناقض صحتها مثل :

١ ـ يمر من نقطتين مختلفتين في المستوي مستقيم وحيد.

٢ ـ من نقطة خارجة عن مستقيم معلوم يمر مُستقيم وحيد موازٍ للمستقيم المعلوم.

إن ما تقدم في هذا البند يوحي بتنوع أساليب البرهان على صواب أو خطأ عبارة ما فهناك مثلاً البرهان التجريبي والبرهان الإحصائي والبرهان الرياضي . وسنهتم فيما يلي بتقديم بعض طرائق البرهان الرياضي.

إن معظم العبارات الرياضية التي يطلب البرهان على صوابها تكون على شكل عبارات شرطية، فإن لم تكن كذلك، فإنه غالباً ما نستطيع تحويلها إلى عبارة شرطية. وهذا وقد رأينا أنه إذا كانت العبارة الشرطية : أ ← ب صائبة وكانت أ صائبة، فإن النتيجة ب صائبة، ويكون الاقتضاء أ ⇐ ب صائباً. وهذا ما نسعى إلى الوصول إليه دائماً. أي نفترض أن المقدمة أ صائبة

ونبرهن أن صوابها يقتضي بالضرورة صواب النتيجة ب . وتعرف هذه الطريقة بطريقة البرهان المباشر، وقد نلجأ ، أحياناً، إلى طرائق أخرى مكافئة لهذه الطريقة مستخدمين ما برهناه في النظرية (١ ـ ١) . ولتبيان ما تقدم نورد ما يلي :

أولاً : البرهان المباشر

تعتمد هذه الطريقة على الإقتناع بأن علاقة الإقتضاء متعدية ، ونعني بذلك : أنه إذا كان أ ⇐ ب ، ب ⇐ جـ فإن أ ⇐ جـ.

وعلى سبيل المثال« تعلم من دراستك في الحديث أن جبريل عليه السلام أتى النبي، ﷺ ، وصحبه ليعلمهم أمر دينهم فبين لهم معنى الإسلام ثم الإيمان ثم الإحسان » فإذا فرضنا أن أ تعني : خالد رجل محسن، ب تعني : خالد رجل مؤمن، جـ تعني : خالد رجل مسلم، فإنَّه وفق مراتب الإسلام : أ ⇐ ب ، ب ⇐ جـ . ومن الواضح أن أ ⇐ جـ ، لأن الإحسان أعلى مرتبة من الإيمان، والإيمان أعلى مرتبة من الإسلام. ويسمى أحياناً هذا الأسلوب في البرهان الطريقة الاستنتاجية، وكمثال آخر على ذلك افرض أن :

أ تعني : س ص ع ل مُربَّع.

ب تعني : س ص ع ل مُعَيَّن.

جـ تعني : س ص ع ل متوازي أضلاع.

تعلم من دراستك في الهندسة أن : أ ⇐ ب، ب ⇐ جـ، وبالطبع فإن أ ⇐ جـ (لأن كل مربع هو معين وكل معين هو متوازي أضلاع إذن من الأوْلى أن يكون كل مربع متوازي أضلاع).

مثال (١ ـ ٨)

أثبت أنه إذا كان س عدداً فردياً فإن س^{٢} عدد فردي (مع العلم أن كل عدد فردي يكتب على الصورة س=٢ ﻥ +١، حيث س ، ﻥ ∈ ك).

الحـــل :

إن الفرض (أو المعطيات) في هذا المثال هو المقدمة أ وهي : س عدد فردي. وإن المطلوب إثباته هو النتيجة ب وهي : $س^٢$ عدد فردي.

نفرض أن المقدمة صائبة ونستخدم الاقتضاء مع التعليل لكل خطوة كما يلي :

س عدد فردي ⟸ س = ٢ ں + ١ طريقة كتابة العدد الفردي.

⟸ $س^٢$ = $(٢ ں + ١)^٢$ بتربيع الطرفين.

⟸ $س^٢$ = ٤ $ں^٢$ + ٤ ں + ١.

⟸ $س^٢$ = ٢(٢ $ں^٢$ + ٢ ں) + ١.

⟸ $س^٢$ = ٢م + ١، حيث م = ٢ $ں^٢$ + ٢ ں .

⟸ $س^٢$ عدد فردي، لأن ٢م + ١ عدد فردي.

إذن س عدد فردي ⟸ $س^٢$ عدد فردي ، وهو المطلوب إثباته.

ونستطيع أن نقول إن س عدد فردي شرط كاف لكون $س^٢$ عدداً فردياً.

ثانياً : البرهان بإعطاء مثال معاكس

إن بعض العبارات الرياضية يكفي لتوضيح خطئها أن نعطي مثالاً نؤيد به جوابنا عليها. وتسمى هذه الطريقة «البرهان بإعطاء مثال معاكس».

مثال (١ ـ ٩)

أثبت أن العبارة «س – ص = ص – س » خاطئة حيث س، ص ∈ح، س ≠ ص (لاحظ أن هذا يكافئ القول : أثبت أن س – ص ≠ ص –س حيث س، ص ∈ح، س ≠ ص)

الحـــل :

بوضع س=٣، ص=–٥ نجد أن :

الطرف الأيمن : ٣– (–٥) = ٨.

الطرف الأيسر = −٥ −٣ = −٨.

إذن الطرف الأيمن ≠ الطرف الأيسر، مما يؤكد خطأ العبارة س − ص = ص−س وبالتالي صواب العبارة س − ص ≠ ص − س).

ملحوظـــة (١ ـ ٢)

لإثبات صواب خاصة ما فإن ذلك يستدعي التعميم ، فمثلاً لإثبات صحة خاصة الإبدال في عملية الضرب في ح لابد أن تتحقق هذه الخاصة لأي عددين حقيقيين. في حين أن نقض « أو نفي» خاصة معيَّنة يكفي أن تكون غير محققة في حالة واحدة ولو تحققت في جميع الحَالات الأخرى، فمثلاً : لكل س، ص ∈ ح فإن $\frac{س}{ص}$ ∈ ح عبارة خاطئة لأنها غير محققة في حالة واحدة وهي عندما ص = ٠ حيث $\frac{س}{٠}$ لا معنى له وبالتالي $\frac{س}{٠}$ ∉ ح. وهذا يعني أننا حصلنا على مثال معاكس للعبارة «لكل س ، ص ∈ ح فإن $\frac{س}{ص}$ ∈ ح».

تمارين (١ ـ ٣)

١ ـ متى نقول عن عبارتين ب،جـ إنهما متكافئتان منطقياً ؟

٢ ـ هل العبارتان الآتيتان متكافئتان مع التعليل ؟

الأولى : « س ص ع مثلث فيه ضلعان متطابقان » .

الثانية : « س ص ع مثلث فيه زاويتان متطابقتان».

٣ ـ أكمل العبارة الآتية :نفي عبارتين متكافئتين يعطينا عبارتين....................

٤ ـ إذا كانت أ ، ب ، جـ ثلاث عبارات بحيث أ ≡ ب ، ب ≡ جـ

فهل أ ≡ جـ ؟ وضِّح إجابتك وإذا كانت إجابتك بنعم فاقترح تسمية لهذه الخاصة.

إذا كانت أ ، ب أي عبارتين فاثبت أن :

٥ ـ ~ (أ ∧ ب) ≡ ~أ ∨ ~ ب

٦ ـ ~ (أ ∨ ب) ≡ ~أ ∧ ~ ب

٧ ـ أ ← ب ≢ ~ أ ← ~ ب

انف كل عبارة في التمارين(٨) إلى (١٠) بطريقتين مختلفتين. وعيِّن قيمة الصدق قبل وبعد النفي.

٨ ـ العسل من النحل والتمر من النخل.

٩ ـ يجوز للمسلم أن يَحقر أخاه ويؤذيه.

١٠ ـ إذا تواضع الإنسان فإن الآخرين يحبونه.

إذا كانت أ ،ب، جـ ثلاث عبارات مختلفة فأثبت أن :

١١ ـ (أ ∧ ب) ∧ جـ ≡ أ ∧ (ب ∧ جـ) (خاصة التجميع بالنسبة للرابط ∧).

١٢ ـ (أ ∨ ب) ∨ جـ ≡ أ ∨ (ب ∨ جـ) (خاصة التجميع بالنسبة للرابط ∨).

١٣ ـ أ ∧ (ب ∨ جـ) ≡ (أ ∧ ب) ∨ (أ ∧ جـ) (خاصة التوزيع للرابط ∧ على ∨).

١٤ ـ أ ∨ (ب ∧ جـ) ≡ (أ ∨ ب) ∧ (أ ∨ جـ) (خاصة التوزيع للرابط ∨ على ∧).

استخدم رمز الاقتضاء ⇐ بين كل عبارتين في التمارين (١٥) ـ (٢٠) وعيِّن الاقتضاء الصائب والخاطئ مع التعليل :

١٥ ـ سمير رجل مسلم؛ سمير تجب عليه الصلاة.

١٦ ـ سمير رجل غير مسلم ؛ سمير تجب عليه الصلاة.

١٧ ـ سمير رجل غير مسلم؛ سمير لا تجب عليه الصلاة.

١٨ ـ سمير رجل مسلم؛ سمير لا تجب عليه الصلاة.

١٩ ـ ٦ × ٧ = ٤٢ ، ٢٧ ÷ ٩ ≠ ٣

٢٠ ـ ١٠ × ٢^{٣} ≠ ٨٠ ، ٤٨ × ٢ = ٩٦.

٢١ ـ استخدم رمز التكافؤ ⇔ بين كل عبارتين في التمارين (١٥) ـ (٢٠) وبيِّن فيما إذا كان التكافؤ صحيحاً أم لا مع التعليل.

٢٢ ـ إذا كانت ب، جـ أي عبارتين فأثبت أن :

ب ← جـ ≢ جـ ← ب وماذا نستنتج من ذلك ؟

٢٣ ـ هل الرمز « ↔ » يحقق خاصة الإبدال ؟

استخدم طريقة البرهان المباشر لإثبات ما يلي :

٢٤ ـ إذا كان س = ٤ فإن $س^٢$ = ١٦ .

٢٥ ـ إذا كان ص = ٢ فإن $ص^٣$ = ٨ .

٢٦ ـ إذا كان ع عدداً حقيقياً غير الصفر فإن مربعه $ع^٢$ عدد حقيقي موجب.

ناقش العبارات الآتية من حيث كونها صائبة أو خاطئة مستخدماً طريقة المثال المعاكس :

٢٧ ـ $(س+٢)^٢ = س^٢ + ٤$ س ∈ ط

٢٨ ـ $(س-ص)^٢ \neq س^٢ + ص^٢$ س ، ص ∈ صـ، مجموعة الأعداد الصحيحة

٢٩ ـ $\sqrt{س^٢ + ص^٢} = س + ص$ س ، ص ∈ ح

٣٠ ـ $\frac{س^٢}{٢} = س$

٣١ ـ $\frac{س^٣}{٣} = س$

٣٢ ـ $\frac{١}{س + ص} = \frac{١}{س} + \frac{١}{ص}$ ، س ، ص ∈ ح، س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠ ، س +ص ≠ ٠

١-٨ المجموعات والعمليات عليها

عرفت في المرحلة المتوسطة أن المجموعة مفهوم أولي ندركه كما ندرك مفهوم النقطة والمستقيم والمستوي. وقد عرفت أن المجموعة يجب أن تتحدد عناصرها تحديداً دقيقاً لا يقبل اللبس. فمثلاً أركان الإسلام الخمسة تكون مجموعة في حين أن البيوت الجميلة في مدينة الرياض لا تكون مجموعة لأن مقياس الجمال يختلف من شخص لآخر. وقد عرفت أن المجموعة قد تكون منتهية كمجموعة الحروف الهجائية وقد تكون غير منتهية كمجموعة الأعداد الطبيعية ط. وقد عرفت أن

المجموعة يمكن كتابتها بذكر عناصرها. أعط مثالين توضح بهما ذلك. والآن حاول أن تجيب على الأسئلة حتى تستعيد كثيراً مما سبق أن درسته :

١ ـ هل تكرار عنصر في مجموعة له أهمية ؟

٢ ـ هل ترتيب العناصر في مجموعة أمر مهم ؟

٣ ـ ما هي المجموعة الخالية ؟ وما رمزها ؟ أعط مثالاً لمجموعة خالية. وكم عنصراً فيها ؟

٤ ـ اكتب رمز الانتماء ونفيه.

٥ ـ اكتب رمز الاحتواء ونفيه.

٦ ـ اكتب رمزيْ التقاطع والاتحاد.

٧ ـ ماذا تعرف عن خصائص عملية التقاطع ؟ هل هي إبدالية أم تجميعية ؟ أيد إجابتك بأمثلة ووضح ما تقوله باستخدام أشكال ڤن.

٨ ـ أجب عن السؤال (٧) بعد استخدام «عملية الاتحاد» بدلا من «عملية التقاطع»

٩ ـ متى تتساوى مجموعتان س ، ع مثلاً ؟

١٠ ـ متى نقول إن س مجموعة جزئية من ع ؟

١١ ـ متى نقول إن س مجموعة جزئية فعلية من مجموعة ع ؟

١٢ ـ بفرض س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ } ،
ع = { ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } ، ش = { ١ ، ٢ ، .... ، ١٠ } ، أجب عما يلي :

(أ) س ∪ ع = { .... }

(ب) س ∩ ص = { .... }

(جـ) ص ∩ ع = ... وهل ص ، ع مجموعتان منفصلتان؟

(د) إذا كانت صَ ترمز لمتممة ص في س فإن صَ = { .... } .

(هـ) اكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة ص . وكم عددها ؟

(و) إن ص = { ص : ٣ ≤ ص ≤ ٥ وَ ص ∋ ط } وإن
ع = { ع : .... }

(ز) ص ∪ صَ = { .... }

(ح) ص ∩ صَ = { .... }

إذا كانت سـ ، صـ أي مجموعتين فقد عرفت أن تقاطعهما هو المجموعة المؤلفة عناصرها من عناصر سـ وَعناصر صـ في آن واحد، أي العناصر المشتركة.
كما عرفت أن اتحادهما هو المجموعة المؤلفة عناصرها من عناصر سـ أو عناصر صـ أما متممة سـ في صـ فهي المجموعة سـَ التي عناصرها تنتمي إلى صـ ولا تنتمي إلى سـ .

تدريب (١ ـ ٣)

استخدم المنطق الرياضي في كتابة (١) سـ ∩ صـ (٢) سـ ∪ صـ (٣) متممة سـ في صـ بدلالة الصفة المميزة للعناصر . استعن بأشكال ڤن للتوضيح.

لعلك قد توصلت إلى أن :

١ ـ سـ ∩ صـ = { س : س ∈ سـ ∧ س ∈ صـ}

٢ ـ سـ ∪ صـ = { س : س ∈ سـ ∨ س ∈ صـ}

٣ ـ سـَ = { س : س ∈ صـ ∧ س ∉ سـ ، سـ ⊂ صـ}

أكمل ما يلي بطريقة مماثلة :

(أ) سـ ∪ سـَ = {س:......................}

(ب) سـ ∩ سـَ = {س : .... } وماذا نستنتج ؟

(جـ) متممة صـ في سـ هي صـَ = { س : ....}

الفرق بين مجموعتين

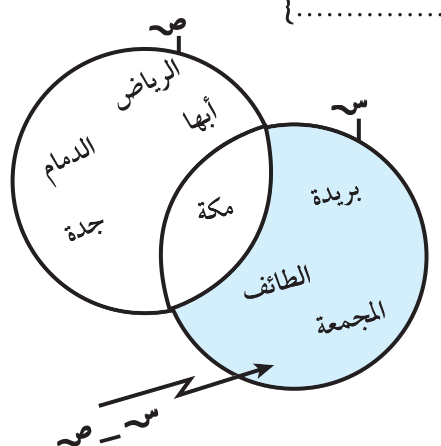
إن الشكل المجاور هو تمثيل ڤن للمجموعتين :

سـ = { مكة ، بريدة ، المجمعة ، الطائف }

صـ = { الرياض ، أبها ، جدة ، مكة ، الدمام }

نرمز للفرق بين سـ ، صـ بالرمز

سـ ـ صـ ونعرفه كما يظهر من الجزء الملون



في الشكل بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى سـ ولا تنتمي إلى صـ، أي أن :

سـ − صـ = { بريدة، المجمعة، الطائف } ________ (١)

بالطريقة ذاتها يكون الفرق بين صـ ، سـ هو :

صـ − سـ = { الرياض ، أبها، جدة، الدمام } ________ (٢)

احسب كلاً من سـَ في صـ ، صـَ في سـ ، ثم تأكد أن :

سـ ∩ صـَ = { الطائف، بريدة ، المجمعة } ________ (٣)

صـ ∩ سـَ = { الرياض، جدة، أبها، الدمام } ________ (٤)

قارن (١) مع (٣)، (٢) مع (٤) ماذا تلاحظ ؟

لعلك أدركت أن :

سـ − صـ = سـ ∩ صـَ ، صـ − سـ = صـ ∩ سـَ

هل سـ − صـ = صـ − سـ ؟ وماذا يمكن أن نستنتج من ذلك؟

تعريف (١ـ٨)

إذا كانت سـ ، صـ أي مجموعتين فإن :

الفرق سـ − صـ = { س : س ∈ سـ ∧ س ∉ صـ }

مثال (١ ـ ١٠)

إذا كانت سـ ، صـ مجموعتين فأثبت أن :

سـ − صـ = سـ ∩ صـَ، حيث صـَ متممة صـ في سـ .

الحـــل :

الطرف الأيمن = سـ − صـ

= { س : س ∈ سـ ∧ س ∉ صـ } ، التعريف (١ ـ ٨)

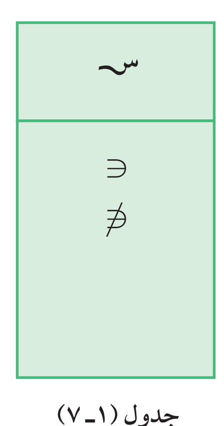
= { س : س ∈ سـ ∧ س ∈ صـَ } لماذا ؟

= سـ ∩ صـَ، تعريف تقاطع مجموعتين.

= الطرف الأيسر.

جدول الانتماء

يلعب جدول الانتماء في المجموعات دوراً مماثلاً لدور جدول الصدق في المنطق. لتكن سـ أي مجموعة وليكن س عنصراً ما. إن أمامنا خياران فقط هما : س $\in$ سـ أو س $\notin$ سـ ويستحيل أن يقع الخياران في وقت واحد. نعبِّر عن ذلك بالجدول (١ ـ ٧) وندعوه جدول الانتماء للمجموعة سـ.
وإذا كانت سـ ، صـ أي مجموعتين مختلفتين وكان س عنصراً ما، فإن الجدول (١ ـ ٨) يبين الخيارات الممكنة لإنتماء هذا العنصر أو عدم انتمائه للمجموعتين سـ ، صـ . قارن هذا الجدول مع الجدول (١ ـ ٣).



سـ
$\in$
$\notin$

جدول (١ـ ٧)

سـ	صـ
$\in$	$\in$
$\in$	$\notin$
$\notin$	$\in$
$\notin$	$\notin$

جدول (١ـ ٨)

تدريب (١ ـ ٤)

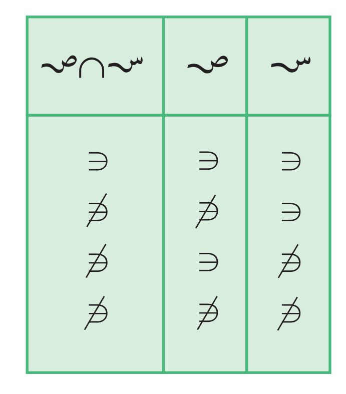
عمِّم هذه الفكرة لتشمل ثلاث مجموعات مختلفة. وأنشئ جدول الانتماء لها، كم عدد الخيارات الممكنة في هذه الحالة ؟

والآن لننشئ جدول الانتماء لعملية التقاطع « $\cap$ »

من تعريف تقاطع مجموعتين سـ ، صـ نعرف أنه إذا كان س عنصراً ما فإنه ينتمي إلى سـ $\cap$ صـ في حالة واحدة فقط من الحالات الأربع الموضحة في الجدول (١ ـ ٨). ألا وهي الحالة الأولى التي يكون فيها س منتمياً إلى سـ ومنتمياً إلى صـ في الوقت ذاته.

ماذا عن الحالات الثلاث الباقية ؟ تأكد أن س $\notin$ سـ $\cap$ صـ في كل منها.

مما تقدم نستنتج أن الجدول (١ ـ ٩) هو جدول الانتماء لعملية التقاطع «$\cap$».



س	ص	س $\cap$ ص
∋	∋	∋
∋	∌	∌
∌	∋	∌
∌	∌	∌

جدول (١ ـ ٩)

س	ص	س $\cup$ ص
∋	∋	
∋	∌	
∌	∋	
∌	∌	

جدول (١ ـ ١٠)

باستخدام تعريف اتحاد مجموعتين س ، ص . بين متى يكون س ∋ س $\cup$ ص . ومتى يكون س ∌ س $\cup$ ص ، حيث س أي عنصر ؟

أكمل جدول الانتماء (١ ـ ١٠) لعملية الاتحاد « $\cup$ ».

تدريب (١ ـ ٥)

بفرض س ، ص أي مجموعتين أنشئ جدول إنتماء لكل من :
س ـ ص ، س $\cap$ صَ ، حيث صَ متممة ص في س . ثم تحقق أن الجدولين متطابقان مما يتفق مع ما أثبتنا صحته في المثال (١ـ١٠).

المجموعة الشاملة :

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ } ، ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ } ، ع = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } فإننا نستطيع اختيار مجموعة تشمل (تحوي) جميع هذه المجموعات، نسميها المجموعة الشاملة ش ، أي أن :
س ⊂ ش ، ص ⊂ ش وكذلك ع ⊂ ش . ويتضح لك أن هذه المجموعة ش يمكن اختيارها

كما نريد بحيث يتحقق الشرط الذي ذكرناه وهو كون شـ تحوى المجموعات الثلاث. مع ملاحظة أنه إذا اختيرت مجموعة شاملة في مسألة ما فيجب تثبيتها في هذه المسألة.

اختر ثلاث مجموعات شاملة مختلفة للمجموعات الثلاث السابقة. ما هي أصغر مجموعة شاملة يمكن اختيارها بالنسبة للمجموعات الثلاث السابقة؟

لعلك أدركت أن أصغر مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات سـ ، صـ ، ع هي المجموعة المكونة من اتحاد هذه المجموعات الثلاث. أي أن :

شـ = (سـ ∪ صـ) ∪ ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨} .

هل تصلح مجموعة الأعداد الطبيعية ط لتكون مجموعة شاملة للمجموعات الثلاث السابقة ؟ ولماذا ؟

هل تصلح مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة، أي {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨،......} لتكون مجموعة شاملة للمجموعات الثلاث السابقة ؟ ولماذا ؟

لعلك توصلت إلى أن المجموعة ط تصلح مجموعة شاملة للمجموعات الثلاث لأن ط تحوي كلاً من سـ ، صـ ، ع . في حين أن مجموعة الأعداد الزوجية لا تصلح مجموعة شاملة للمجموعات الثلاث ، لأن سـ مثلاً غير محتواة في مجموعة الأعداد الزوجية الموجبة.

تدريب (١ ـ ٦)

بفرض سـ ⊂ شـ ، سـَ متممة سـ في شـ أكمل ما يلي :

١ ـ سـ ∪ شـ = ...
٢ ـ سـ ∩ شـ = ...
٣ ـ سـ ∪ سـَ = ...
٤ ـ سـ ∩ سـَ = ...

مثال (١ ـ ١١)

إذا كانت شـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، سـ = {٣ ، ٤ ، ٥} ، صـ = {٤ ، ٦}

فاكتب عناصر المجموعات الآتية واستعن بشكل ڤن لتوضيح الجواب.

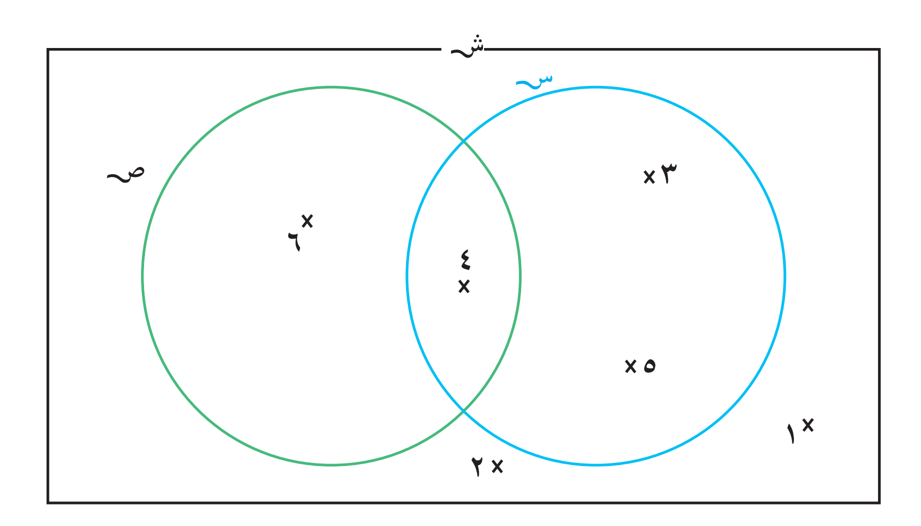
١ ـ سـَ متممة سـ في شـ

٢ ـ صـَ متممة صـ في شـ

٣ـ س ∪ ص

٤ـ (س ∪ ص)′ متممة س ∪ ص في ش

٥ ـ س′ ∩ ص′، قارن (٤) مع (٥) ماذا تلاحظ ؟



الحـــــلّ :

١ ـ س′ = {١، ٢، ٦}

٢ ـ ص′ = {١، ٢، ٣، ٥}

٣ـ س ∪ ص = {٣، ٤، ٥، ٦}

٤ ـ (س ∪ ص)′ = {١، ٢}

٥ ـ س′ ∩ ص′ = {١، ٢}

من (٤)، (٥) نلاحظ أن متممة اتحاد المجموعتين س ، ص يساوي تقاطع متممتيهما أي أن (س ∪ ص)′ = س′ ∩ ص′.

تدريب (١ ـ ٧)

في المثال (١ ـ ١١) أكمل ما يلي :

١ ـ س ∩ ص = {........}

٢ ـ (س ∩ ص)′ = { .... } متممة س ∩ ص في ش

٣ ـ س′ ∪ ص′ = { .... }

٤ ـ من (٢) ، (٣) نلاحظ أن (س ∩ ص)′ = س′ ∪ .... ، أي أن :

متممة التقاطع = ...

نظرية (١ ـ ٣)

لأي مجموعتين جزئيتين س ، ص من مجموعة شاملة ش يكون

١ ـ (س ∪ ص)′ = س′ ∩ ص′

٢ ـ (س ∩ ص)′ = س′ ∪ ص′

البرهـــــان

نبرهن على صحة الفقرة (١) ونترك لك إكمال برهان الفقرة (٢)

س	ص	س′	ص′	(س ∪ ص)	(س ∪ ص)′	س′ ∩ ص′	س ∩ ص	(س ∩ ص)′	س′ ∪ ص′
∈	∈	∉	∉	∈	∉	∉			
∈	∉	∉	∈	∈	∉	∉			
∉	∈	∈	∉	∈	∉	∉			
∉	∉	∈	∈	∉	∈	∈			
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

جدول (١ـ ١١)

١ ـ إن متممة اتحاد المجموعتين س ، ص يساوي تقاطع متممتي س ، ص أي أن (س ∪ ص)′ = س′ ∩ ص′ ، وذلك واضح من تطابق العمودين (٦) ،(٧) في الجدول (١ـ١١).

٢ـ أكمل الأعمدة (٨) ، (٩) ، (١٠) ومن ثم قارن بين العمودين (٩) ، (١٠) وماذا تستنتج من ذلك ؟

نظرية (١ ـ ٤)

لأي ثلاث مجموعات سـ ، صـ ، ع يكون :

١ ـ سـ ∩ (صـ ∪ ع) = (سـ ∩ صـ) ∪ (سـ ∩ ع)

وهذا يعني أن عملية التقاطع « ∩ » تتوزع على عملية الاتحاد « ∪ »

٢ ـ سـ ∪ (صـ ∩ ع) = (سـ ∪ صـ) ∩ (سـ ∪ ع)

وهذا يعني أن .... (أكمل العبارة بنفسك).

البرهـــان

نستخدم جداول الانتماء لإثبات الفقرة (١) ونترك إثبات الفقرة (٢) بطريقة مماثلة تماماً .

لاحظ أن عدد الاختيارات للانتماء هنا ثمانية لأن لدينا ثلاث مجموعات مختلفة.

من العمودين (٧) ، (٨) في الجدول (١ ـ ١٢) نستنتج صحة الفقرة (١) من النظرية لأن العمودين متطابقان.

أكمل الجدول (١ـ١٢) لتبرهن على صحة الفقرة (٢) من النظرية.

سـ	صـ	ع	صـ∪ع	سـ∩صـ	سـ∩ع	الطرف الأيمن من (١)	الطرف الأيسر من (١)	الطرف الأيمن من (٢)	الطرف الأيسر من (٢)
∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈	∈		
∈	∈	∉	∈	∈	∉	∈	∈		
∈	∉	∈	∈	∉	∈	∈	∈		
∈	∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉		
∉	∈	∈	∈	∉	∉	∉	∉		
∉	∈	∉	∈	∉	∉	∉	∉		
∉	∉	∈	∈	∉	∉	∉	∉		
∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉		
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠

جدول (١ـ١٢)

تمــــارين (١ ـ ٤)

حدد فيما إذا كانت العبارة صائبة أم خاطئة مع التبرير ما أمكن في التمارين (١) ـ (٧) :

١ ـ لم نستفد من المنطق الرياضي في العمليات على المجموعات.

٢ ـ المجموعة الخالية مكونه من عنصر واحد فقط هو الصفر أي أن ∅ = { ٠ }.

٣ ـ ∅ ⊃ سـ مهما كانت سـ.

٤ ـ جداول الانتماء لا تشبه في فكرتها جداول الصدق.

٥ ـ أشكال ڤن تستخدم للتوضيح فقط ولا تعتبر برهاناً رياضياً.

٦ ـ الرجال الأذكياء في العالم يكونون مجموعة .

٧ ـ جداول الانتماء وسيلة ناجحة لبرهان كثير من القضايا الرياضية.

عبر عن المجموعات الآتية بواسطة الصفة المميزة لعناصرها :

٨ ـ { ١ ، ٤ ، ٩ ، ١٦ ، ٢٥ } .

٩ ـ { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ } .

١٠ ـ { أبوبكر، عثمان ، عمر، علي } (رضي الله عنهم أجمعين).

١١ ـ { الكويت، السعودية، الأردن، سوريا، تركيا، إيران } .

١٢ ـ { $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$ }

١٣ ـ بين صح أو خطأ كل مما يلي مع التعليل :

(أ) ∅ ⊃ { ١ }　　(ب) ١ ⊃ { ١ }　　(جـ) ١ ∋ { ١ }

(د) { ١ } ⊃ { { ١ } }　　(هـ) { ١ } ∋ { { ١ } }　　(و) ∅ ∋ { { ١ } }

١٤ ـ إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، صـ = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

ع = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } ، شـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ٩ }

فأوجد ما يلي :

(أ) سـ ∪ صـ　　(ب) سـ ∩ صـ　　(جـ) سـ ــ صـ　　(د) سـ ∩ صـَ

(هـ) (سـ ∪ صـ) ∪ ع　　(و) سـ ∪ (صـ ∪ ع)　　(ز) (سـ ∩ صـ) ∩ ع

(ح) سـ ∩ (صـ ∩ ع)　　(ط) (صـ ∩ ع)َ　　(ي) صـَ ∪ عَ

١٥ ـ في التمرين (١٤) قارن بين نتيجتي (جـ) ، (د) وماذا تلاحظ ؟ ثم قارن بين نتيجتي (هـ) ، (و) وكذلك بين نتيجتي (ز) ، (ح) وماذا تلاحظ ؟ اقترح تسمية لهذه الخاصة.
وأخيراً قارن نتيجتي (ط)، (ي)، وعبِّر عن ملاحظاتك بعبارة لفظية.

١٦ ـ لأي ثلاث مجموعات سـ ، صـ ، عـ استخدم جداول الانتماء لإثبات ما يلي :
(أ) (سـ ∪ صـ) ∪ عـ = سـ ∪ (صـ ∪ عـ) خاصة التجميع للعملية « ∪ »
(ب) (سـ ∩ صـ) ∩ عـ = سـ ∩ (صـ ∩ عـ) ، خاصة التجميع للعملية « ∩ »

١٧ ـ إذا كانت سـ = مجموعة طلاب مدرستك
صـ = مجموعة طلاب السنة الأولى في مدرستك.
عـ = مجموعة طلاب المدرسة الذين يحفظون سورة البقرة.
فاعط وصفاً بالكلمات لكل من المجوعات التالية :
(أ) سـ ∩ صـ
(ب) سـ ∩ عـ
(جـ) صـ ∩ عـ
(د) سـ ∪ صـ
(هـ) صـ ∪ عـ
(و) صـ ∪ (سـ ∩ عـ)
(ز) سـ ∩ (صـ ∩ عـ)
(ح) صـ ∩ (سـ ∩ عـ)
(ط) سـ ــ صـ
(ي) عـ ــ صـ.

١٨ ـ إذا كانت سـ ، صـ أي مجموعتين فأجب عما يلي :
(أ) متى نقول عن سـ ، صـ إنهما منفصلتان ؟
(ب) إذا كانت سـ ∩ صـ = ∅ فأثبت أن سـ ــ صـ = سـ وكذلك صـ ــ سـ = صـ.

تمـــارين عامـــة

١ ـ أي من العبارات التالية صائبة وأي منها خاطئة ؟

(أ) مجموعة الأعداد الطبيعية ط مجموعة جزئية فعلية من مجموعة الأعداد النسبية ن .

(ب) (٢ ∈ ط) ∧ ($\frac{٢}{٣}$ ∈ ن)　　　(جـ) (٥ ∉ ط) ∧ ($\frac{١٦}{٣}$ ∉ ن)

(د) (٣ ∈ ط) ∨ ($\sqrt{٢}$ ∈ ن)

(هـ) س ∈ ط ← س ∈ ن

(و) س ∉ ط ← س ∉ ن

(ز) س ∈ ط ← س ∉ ن

(ح) س ∈ ط ↔ س ∈ ن

(ط) س ص ع ل معين ⇔ أضلاعه الأربعة متطابقة.

(ي) س ص ع ل شكل رباعي أضلاعه الأربعة متطابقة ⇐ س ص ع ل مربع.

(ك) (س ≯ ص) ∧ (س ≮ ص) ⇐ س = ص.

(ل) الشرط اللازم والكافي ليكون الرباعي مربعاً هو أن ينصف كل من قطريه القطر الآخر.

(م) الشرط اللازم والكافي ليكون الرباعي متوازي أضلاع هو أن ينصف كل من قطريه القطر الآخر.

٢ ـ إذا كان أ ⇐ ب صائباً فإن ب ⇐ أ صائب أيضاً . بيِّن خطأ العبارة السابقة بمثال .

٣ ـ إذا كان أ ⇐ ب صائباً وكان ب ⇐ أ صائباً أيضاً فإن أ ⇎ ب . صحح العبارة السابقة إن كانت خاطئة. واعط مثالاً تؤيد به إجابتك.

٤ ـ اختر أحد الرمزين ← ، ↔ لربط كل عبارتين مما يلي بحيث تحصل على عبارة صائبة :

(أ) الشكل الرباعي مستطيل ـ قطرا الشكل الرباعي ينصفان بعضهما.

(ب) الشكل الرباعي معين ـ أضلاع الشكل الرباعي متساوية.

(جـ) الشكل الرباعي مربع ـ الشكل الرباعي إحدى زواياه قائمة وأضلاعه متساوية.

(د) الشكل الرباعي مستطيل ـ الشكل الرباعي زواياه قوائم.

٥ ـ أ ، ب أي عبارتين ، أثبت أن :

$$أ \leftrightarrow ب \equiv (\sim أ \vee ب) \wedge (\sim ب \vee أ) \equiv ب \leftrightarrow أ$$

٦ ـ هل العبارتان $أ \rightarrow ب$ ، $ب \rightarrow أ$ متكافئتان مع التعليل ؟

٧ ـ أثبت صحة ما يلي :

(أ) $س = ٦ \Rightarrow س^٢ = ٣٦$

(ب) $٤ص = ٨ \Rightarrow ص = ٢$

٨ ـ استعض عن الرمز $\Rightarrow$ بالرمز $\Leftrightarrow$ في التمرين (٧) وناقش صحة أو خطأ كل من (أ) ، (ب).

٩ ـ إذا كان س ص ع مثلثاً ، فأثبت أن مجموع زواياه ١٨٠° .

١٠ ـ أثبت أن $(س - \frac{٢}{٣} ص)^٢ \neq س^٢ + \frac{٤}{٩} ص^٢$، حيث س ،ص عددان حقيقان .

١١ ـ لأي مجموعتين سـ ، صـ أثبت أن :

$$سـ \cap صـ = سـ \cup صـ \Leftarrow سـ = صـ .$$

١٢ ـ افرض أن $سـ_١$ = مجموعة سكان مدينة الرياض،

$سـ_٢$ = مجموعة سكان المملكة العربية السعودية من غير السعوديين.

$سـ_٣$ = مجموعة سكان العالم ممن تقل أعمارهم عن عشر سنوات.

$سـ_٤$ = مجموعة سكان قارة آسيا من الأميين (غير المتعلمين).

عبِّر عن المجموعات التالية بدلالة $سـ_١$ ، $سـ_٢$، $سـ_٣$، $سـ_٤$.

(أ) مجموعة سكان الرياض غير السعوديين.

(ب) مجموعة سكان الرياض من غير السعوديين الذين تقل أعمارهم عن عشر سنوات.

(جـ) مجموعة سكان الرياض من الأميين غير السعوديين.

(د) مجموعة سكان الرياض من الأميين من غير السعوديين الذين تقل أعمارهم عن عشر سنوات.

(هـ) مجموعة سكان المملكة العربية السعودية من غير السعوديين الذين تقل أعمارهم عن عشر سنوات.

١٣ ـ إذا كانت $سـ \supset صـ$ فأكمل :

(أ) $سـ \cup صـ$ = ...

(ب) $سـ \cap صـ$ = ...

١٤ ـ إذا كانت س ⊂ ص فما هي العلاقة بين س ، ص ؟

١٥ ـ إذا كان س − ص = ص − س فماذا يمكن أن يقال عن س ، ص ؟

الباب الثاني

العلاقات والتطبيقات

٢ ـ ١ تمهيد .

٢ ـ ٢ مفهوم التطبيق.

٢ ـ ٣ أنواع التطبيقات .

٢ ـ ٤ تحصيل (تركيب) التطبيقات .

٢ ـ ٥ معكوس التطبيق .

٢ ـ ١ تمهيـــــد :

سبق أن تعرَّفت على العلاقة من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ خلال دراستك في المرحلة المتوسطة. وتعلم أن العلاقة من سـ إلى صـ هي مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي سـ x صـ ولتذكيرك بالجداء الديكارتي لمجموعتين : خُذْ مثلاً :

سـ = { القاهرة ، بغداد ، الرياض } ، صـ = { السعودية ، مصر ، العراق ، الأردن } .

إن الجداء الديكارتي للمجموعة سـ بالمجموعة صـ هو المجموعة التي عناصرها الأزواج المرتبة التي حدها الأول ينتمي إلى سـ وحدها الثاني ينتمي إلى صـ أي أن :

سـ x صـ = { (س ، ص) : س ∈ سـ ∧ ص ∈ صـ } .

= {(القاهرة، السعودية) ، (القاهرة، مصر) ، (القاهرة ، العراق) ،
(القاهرة ، الأردن) ، (بغداد ، السعودية) .....، (الرياض، الأردن) } أكمل الفراغ.

ولتذكيرك بالعلاقة من سـ إلى صـ دَعْنا نُعرِّف علاقة ع من سـ إلى صـ كما يلي : (انظر المخطط السهمي للعلاقة ع كما في الشكل (٢ـ١)).

س ع ص ⟺ س هي عاصمة ص فتكون :

ع = { (القاهرة، مصر)، (بغداد ، العراق)، (الرياض، السعودية) }.

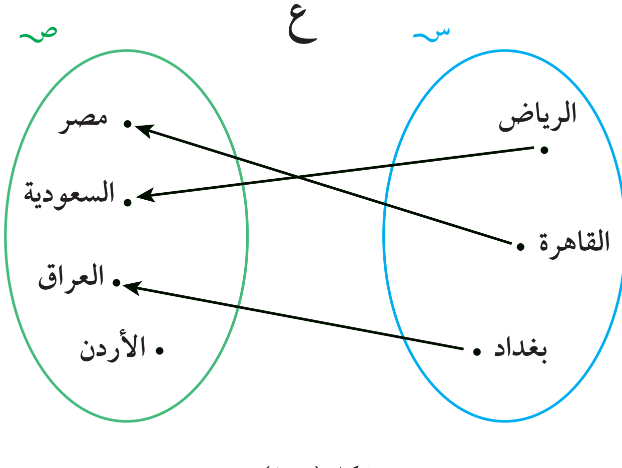
تُسمّى المجموعة ع ، أحياناً بيان العلاقة ع ، كما تدعى سـ مجال العلاقة ع وَصـ مجالها المقابل أما المجموعة الجزئية من صـ التي ترتبط عناصرها بعناصر المجموعة سـ فتدعى مدى العلاقة ع ، أي أن :

مدى ع = { السعودية ، مصر ، العراق } .

إن العبارة : (القاهرة، مصر) ∈ ع تكافئ العبارة : القاهرة هي عاصمة مصر أو العبارة المختصرة : القاهرة ع مصر ، أي أن :

(القاهرة، مصر) ∈ ع ⟺ القاهرة ع مصر.

في حين أن العبارة (القاهرة، السعودية) ∉ ع ونعبر عن ذلك بصورة متكافئة لها وهي : القاهرة ع̸ السعودية (وتعني أن القاهرة ليست عاصمة السعودية).



شكل (٢ـ١)

وبصورة عامة :

(س ، ص) ∈ ع ⟺ س ع ص و (س، ص) ∉ ع ⟺ س ∤ع ص.

هل (س ، ص) = (ص ، س) ؟

لعلك تذكر أن (س ، ص) ≠ (ص ، س)، فمثلاً في مثالنا السابق :

(القاهرة ، مصر) ≠ (مصر ، القاهرة) لأن الزوج المرتب الأيمن يعني وفق ترتيبنا للعلاقة ع :
القاهرة هي عاصمة مصر في حين أن الزوج المرتب الأيسر يعني : مصر هي عاصمة القاهرة. إذن الزوجان غير متساويين قطعاً.

متى يكون (س ، ص) = (ص ، س) ؟ إنه في حالة واحدة هي عندما س = ص .

تمارين (٢ ـ ١)

١ ـ إذا كانت سـ = {١ ، ٢} ، صـ = {٢ ، ٣ ، ٤} فاكتب عناصر كل من المجموعات الآتية :

(أ) سـ × صـ (ب) صـ × سـ (جـ) سـ^{٢} = سـ × سـ (د) صـ^{٢}

(هـ) (سـ × سـ) ∪ (سـ × صـ) (و) سـ × (سـ ∪ صـ).

(ز) سـ^{٢} ∩ (سـ × صـ) (ح) سـ × (سـ ∩ صـ).

٢ ـ في التمرين (١) قارن بين نتيجتي (أ) ، (ب) وماذا نستنتج ؟

٣ ـ في التمرين (١) قارن بين نتيجتي (هـ)، (و) هل يمكنك استنتاج شيء ما ؟

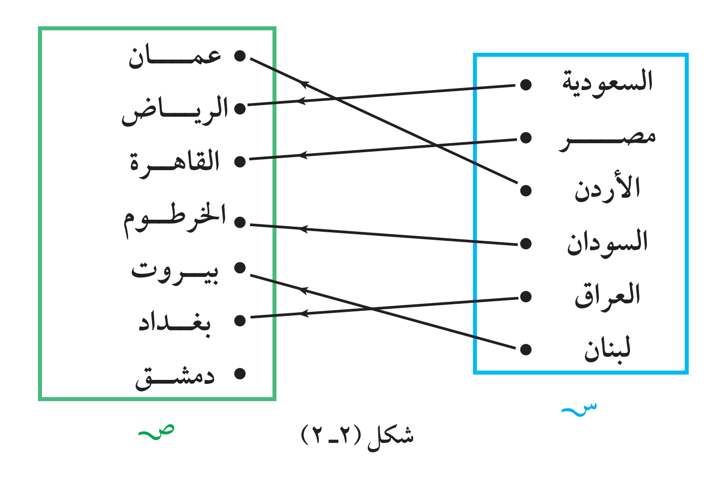
٤ ـ في التمرين (١) قارن بين نتيجتي (ز) ، (ح) ماذا تستنتج ؟
٥ ـ في التمرين (١) مثِّل بطريقتين مختلفتين كلا من سـ x صـ ، سـ^٢

٢ ـ٢ مفهـوم التطبيـق

سندرس في بقية بنود هذا الباب نوعاً خاصاً من العلاقات له أهمية كبيرة في الرياضيات ، نمهد له بالأمثلة التالية :

مثال (٢ ـ ١)

لكل بلد من المجموعة
سـ = { السعودية ، مصر ، الأردن ، السودان ، العراق ، لبنان } نعين عاصمة من المجموعة.
صـ = { عمان ، الرياض ، القاهرة ، الخرطوم ، بيروت ، بغداد ، دمشق }.
كما يتضح من الشكل (٢ ـ٢).



شكل (٢ـ٢)

لاحظ أن كل بلد من المجموعة سـ انطلق منها سهم واحد فقط إلى عاصمتها في المجموعة صـ وقد سبق لك أن سميت هذا الشكل مخططاً سهمياً وهو كما تعلم يعرِّف علاقة من سـ إلى صـ .

مثال (٢ ـ ٢)

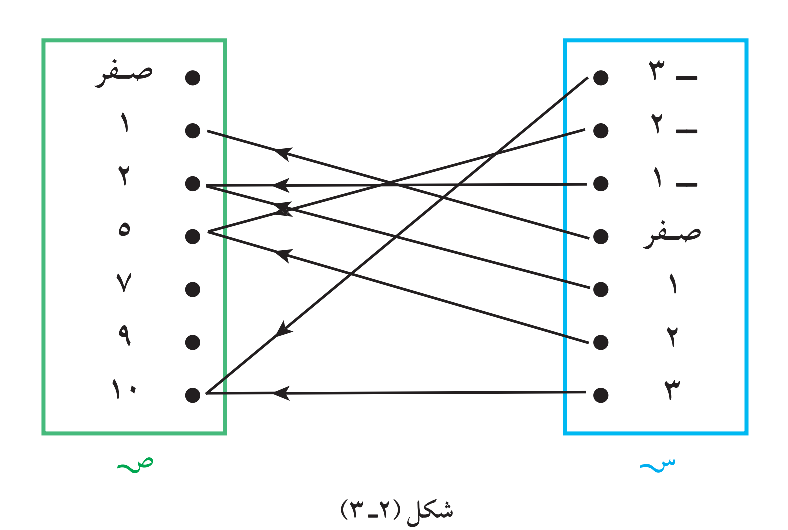
إذا كانت سـ = { -٣ ، -١ ، -٢ ، صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ }

صـ = { صفر ، ١ ، ٢ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٠ }.

وعرفنا العلاقة التي تعين لكل س ∈ سـ العدد ص ∈ صـ بالصورة :

$ص = س^2 + ١$

فإنه يمكن تمثيل هذه العلاقة بالمخطط السهمي كما في الشكل (٢ ـ٣).



شكل (٢ـ٣)

مثال (٢ ـ ٣)

لدينا المجموعتان

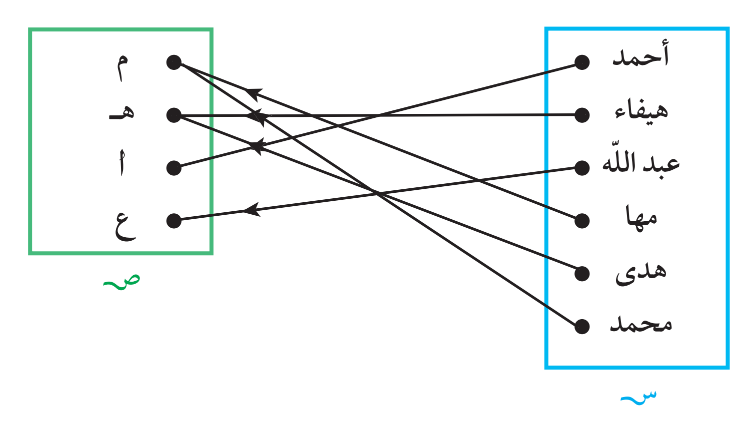
سـ = { أحمد ، هيفاء ، عبد الله ، مها ، هدى ، محمد }

صـ = { م ، هـ ، أ ، ع }

نعرف العلاقة الآتية :

كل اسم من المجموعة سـ يرتبط بحرفه الأول من المجموعة صـ .

يمكننا تمثيل هذه العلاقة بالمخطط السهمي كما في الشكل (٢ـ٤).



شكل (٢ـ٤)

مثال (٢ ـ ٤)

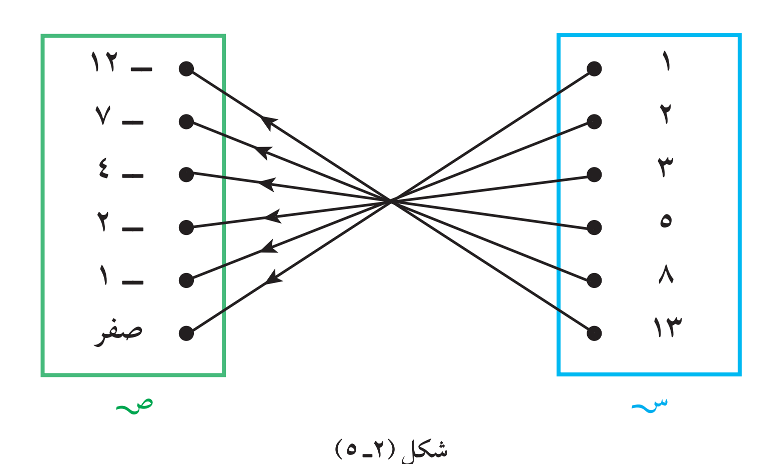
إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ }

ص = { −١٢ ، −٧ ، −٤ ، −٢ ، −١ ، صفر }

وعرفنا العلاقة التي تعين لكل س ∈ س العدد ص ∈ ص بالصورة

ص = − س + ١ .

فيمكن تمثيل هذه العلاقة بالمخطط السهمي كما في الشكل (٢ ـ ٥).



شكل (٢ـ٥)

من خلال دراستنا للأمثلة السابقة نلاحظ أن العلاقات المذكورة تتميز بالصفتين التاليتين :

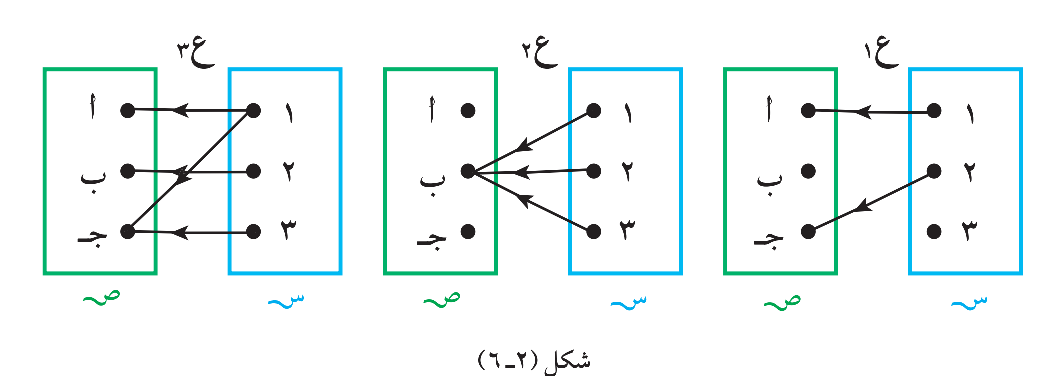
١ ـ أنها ربطت كل عنصر في سـ بأحد عناصر صـ ، أي أن هناك سهماً يبدأ من كل عنصر في سـ .

٢ ـ أن العنصر الواحد في سـ اقترن بعنصر واحد فقط في صـ ، أي أنه لايوجد أكثر من سهم واحد يبدأ من أي عنصر في سـ .

نسمي العلاقة التي تتميز بهاتين الصفتين، تطبيقاً من سـ إلى صـ ، كما سبق أن درست في المرحلة المتوسطة.

مثال (٢ ـ ٥)

المخططات السهمية في الشكل (٢ ـ ٦) تمثل علاقات من سـ إلى صـ ، والمطلوب تحديد التطبيقات من بينها.



شكل (٢ـ٦)

الحـــل :

العلاقة ع١ ليست تطبيقاً لأن العنصر ٣ ∈ سـ غير مقترن بأي من عناصر صـ، مما يناقض الصفة الأولى للتطبيق.

العلاقة ع٢ تطبيق.

العلاقة ع٣ ليست تطبيقًا لأن العنصر ١∈ سـ مقترن بالعنصرين أ ، جـ ∈ صـ ، مما يناقض الصفة الثانية للتطبيق.

مثال (٢ ـ ٦)

لتكن سـ = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ١٠ ، ١١ }

صـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ }

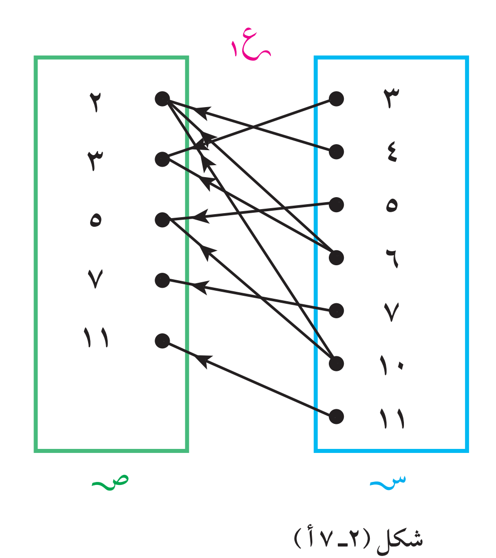
ونعرف العلاقتين ع١ ، ع٢ من سـ إلى صـ كما يلي :

س ع١ ص ⟺ ص عامل من عوامل س ، حيث س ∈ سـ ، ص ∈ صـ.

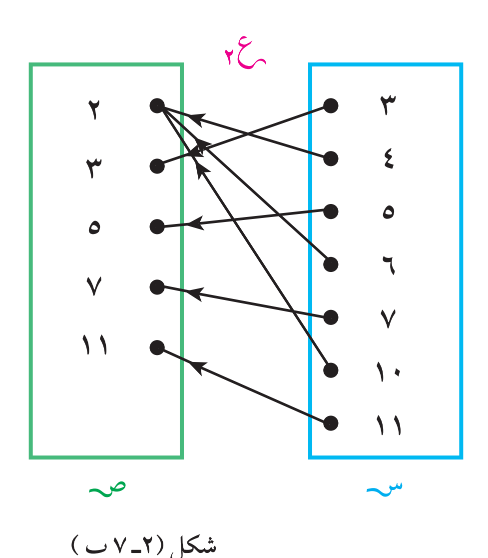
س ع٢ ص ⟺ ص أصغر عوامل س ، حيث س ∈ سـ ، ص ∈ صـ.

لاحظ أن مخطط العلاقة ع١ في الشكل (٢ ـ٧ أ) لا يمثل تطبيقاً لأن كلاً من العنصرين ٦ ، ١٠ ∈ سـ مقترن بأكثر من عنصر في ع١ (أي أنه انطلق من كل منهما أكثر من سهم).

بينما العلاقة ع٢ تطبيق لأنها تتميز بالصفتين السابق ذكرهما كما يتضح من الشكل (٢ ـ ٧ ب).



شكل (٢ـ٧ أ)



شكل (٢ـ٧ ب)

تعريف (٢ ـ ١)

العلاقة من مجموعة غير خالية سـ إلى مجموعة غير خالية صـ ، حيث يقترن كل عنصر في سـ بعنصر واحد فقط في صـ تسمى تطبيقاً.

إذا كان ر تطبيقاً من سـ ← صـ فإننا نرمز لذلك بالطريقة التالية :

ر : سـ ← صـ أو سـ $\xleftarrow{ر}$ صـ

ونسمي المجموعة سـ مجال التطبيق ر ،والمجموعة صـ المجال المقابل.

على سبيل المثال، نجد أن المجال في المثال (٢ ـ ٤) هو المجموعة

{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١٣ } ،

والمجال المقابل هو المجموعة {−١٢ ، −٧ ، −٤ ، −٢ ، −١ ، صفر }

تدريب (٢ ـ ١)

عين المجال والمجال المقابل للتطبيقات في كل من الأمثلة (٢ ـ ١) ، (٢ ـ ٢) ، (٢ ـ ٣) ، (٢ ـ ٥) ، (٢ ـ ٦) .

تعريف (٢ ـ ٢)

إذا كان التطبيق ر : سـ ← صـ يعين للعنصر س ∋ سـ

العنصر ص ∋ صـ فإن ص تسمى صورة العنصر س تحت تأثير التطبيق ر ، ويعبر عن ذلك رمزياً كما يلي :

س $\xleftarrow{ر}$ ص أو ص = ر (س).

المجموعة الجزئية من صـ التي تتألف من جميع صور عناصر سـ تحت تأثير التطبيق ر تسمى مدى التطبيق ر .

أي أن :

مدى التطبيق ر = { ص ∋ صـ : ص = ر (س) ، س ∋ سـ } ⊂ صـ .

كما سبق التمثيل الذي يعين لكل س ∋ سـ صورة ص ∋ صـ بيان التطبيق.

فعلى سبيل المثال ، بيان التطبيق في المثال (٢ ـ ٦) عبارة عن مخطط سهمي كما في الشكل (٢ ـ ٧ب).

مثال (٢ ـ ٧)

لنعرف التطبيق م : ط ⟵ ط ، حيث ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية ، كما يلي :

م (ن) = ٢ ن .

أوجد صورة العناصر ٣ ، ٤ ، ٧ ، ١١٥ ، ٤٢٥ ثم أوجد مدى هذا التطبيق.

الحـــل :

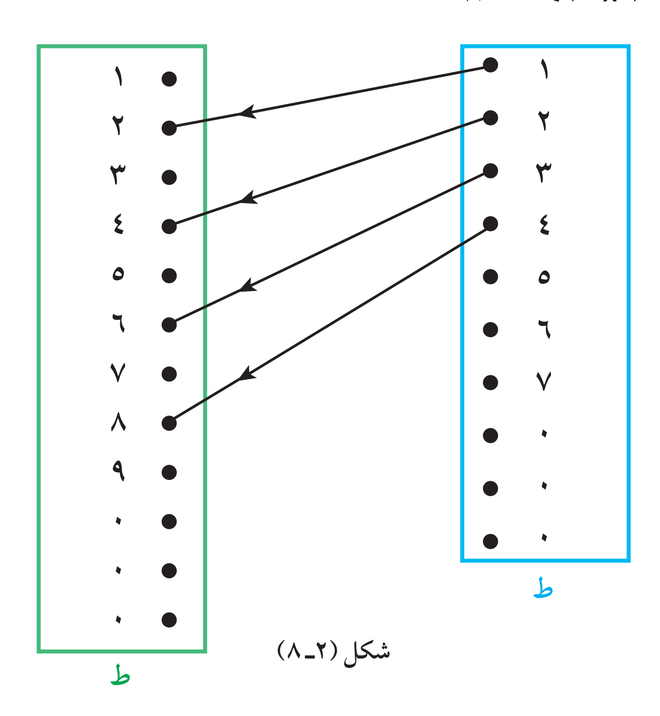
م (٣) = ٢ x ٣ = ٦

م (٤) = ٢ x ٤ = ٨

م (٧) = ٢ x ٧ = ١٤

م (١١٥) = ٢ x ١١٥ = ٢٣٠

م (٤٢٥) = ٢ x ٤٢٥ = ٨٥٠



شكل (٢ـ٨)

نلاحظ أن التطبيق م يعين لكل عدد طبيعي عدداً طبيعياً آخر يساوي ضعفه (مثْلَيْه) وبالتالي فإن المدى مؤلف من الأعداد الطبيعية الزوجية فقط (انظر الشكل « ٢ ـ ٨ »)، وذلك حسب التعريف (٢ـ٢) . أي أن :

مدى م = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ... } = { ٢ ن : ن ∈ ط }

= ط − { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ... } ⊂ ط .

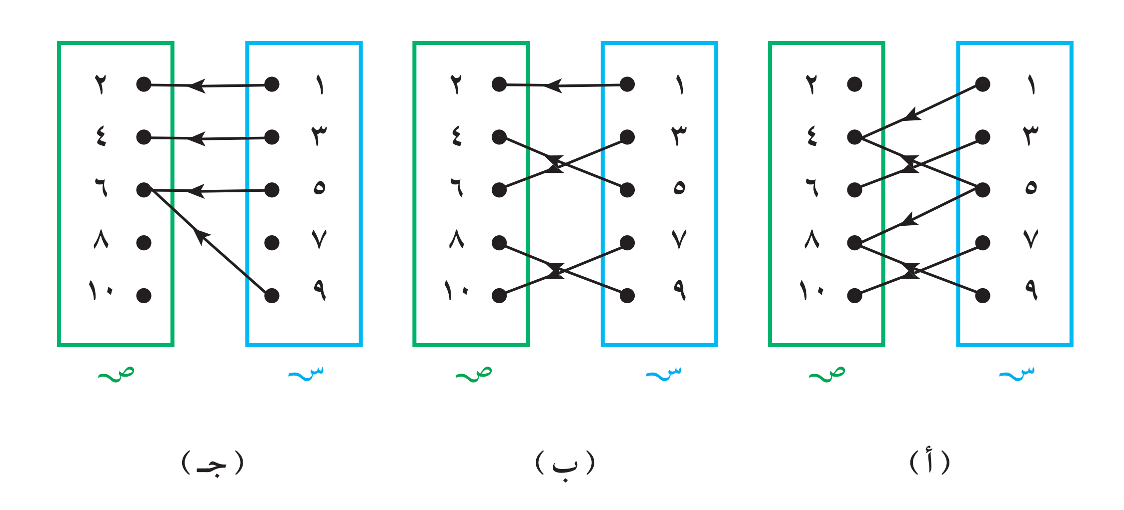
تدريب (٢ ـ ٢)

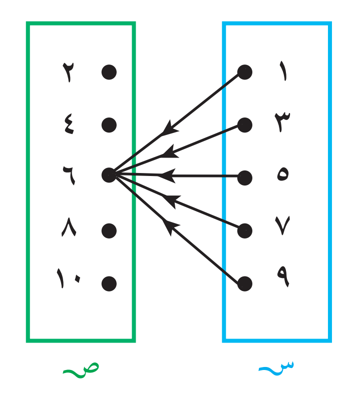
عين مدى كل تطبيق في الأمثلة من (٢ ـ ١) إلى (٢ ـ ٦) .

تمارين (٢ ـ ٢)

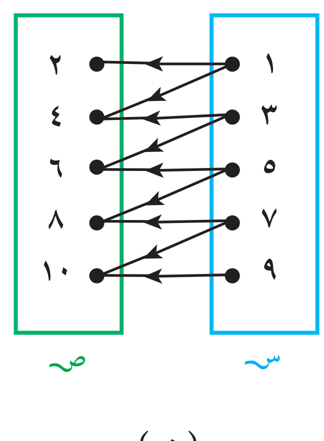
١ ـ إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

فأي المخططات السهمية التالية تمثل تطبيقاً من س إلى ص ؟ علل إجابتك ، وعين المدى لكل تطبيق، وحدد العلاقة بين مجموعة المدى ومجموعة المجال المقابل .





(د)



(هـ)

٢ـ إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، صـ = { صفر ، ٤ ، ٥ } وكان ر (١) = ٤ ، ر (٢) = صفراً، ر (٣) = ٥ ، فأجب عما يلي :

(أ) مثِّل التطبيق ر كأزواج مرتبة. (باعتباره مجموعة جزئية من الجداء الديكارتي سـ × صـ)

(ب) مثِّل التطبيق ر بمخطط سهمي.

(جـ) عين المجال والمجال المقابل والمدى لهذا التطبيق.

٣ ـ لتكن سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، صـ = سـ.

الجدول التالي يعين لكل س ∈ سـ العنصر ص ∈ صـ الموجود تحته مباشرة.

س	١	٢	٣	٤	٥
ر (س)	٤	٢	١	٢	٤

(أ) ارسم مخططاً سهمياً يمثل هذا التطبيق.

(ب) ماهي صورة العدد ٣ في هذا التطبيق ؟

(جـ) هل مدى هذا التطبيق يساوي مجاله المقابل ؟

(د) هل هناك عنصر في صـ هو صورة لأكثر من عنصر في سـ ؟

٤ ـ م : ط ⟵ ط ، بحيث م (س) = $س^٢$ + ١

(أ) أوجد م (٣) ، م (٥) ، م (٦) ، م (هـ) ، م (هـ + ١)

(ب) ما هو مدى التطبيق م ؟

٥ ـ صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة. لنعرف التطبيق م : ص ⟵ صـ كما يلي :

م (س) = { ١ إذا كان س عدداً زوجياً.
صفراً إذا كان س عدداً فردياً.

(أ) ما هي صورة كل من الأعداد :

ـ ٨ ، ـ ٦ ، ـ ٤ ، ـ ٢ ، صفر ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ في هذا التطبيق ؟

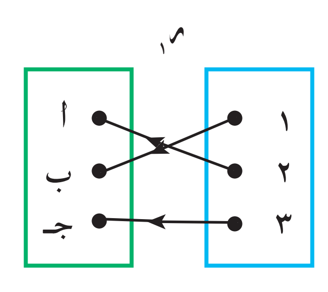
(ب) ما هي صورة كل من الأعداد :

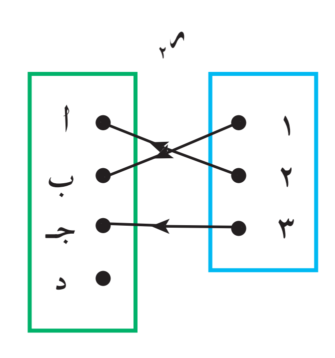
ـ ٧ ، ـ ٥ ، ـ ٣ ، ـ ١ ، ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ في التطبيق م ؟

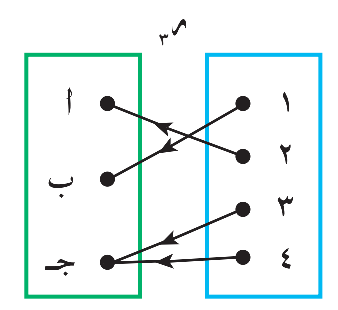
(جـ) ما هو مدى التطبيق م ؟

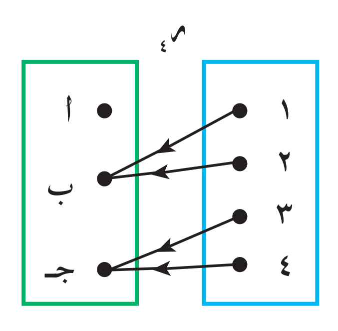
٢ ـ ٣ أنواع التطبيقات :

بدراسة المخططات السهمية للتطبيقات التالية في شكل (٢ – ٩) :









شكل (٢ ـ ٩)

نلاحظ ما يلي

أولاً : في مخططي $ت_1$ ، $ت_3$ يوجد سهم (واحد على الأقل) ينتهي عند كل عنصر في المجال المقابل، أي أن كل عنصر في المجال المقابل هو صورة لعنصر واحد على الأقل في المجال، فالمدى = المجال المقابل . وتعلم أن مثل هذه التطبيقات تسمى تطبيقات شاملة (غامرة).

ثانياً : في مخططي $ت_1$ ، $ت_2$ لا يجتمع أكثر من سهم واحد عند عنصر في المجال المقابل ، أي أنه لا يقترن عنصران مختلفان من عناصر المجال بعنصر واحد في المجال المقابل .

وتعلم أن مثل هذه التطبيقات تسمى تطبيقات متباينة (أحادية) .

نوجز الملاحظتين السابقتين بالتعريف التالي :

تعريف (٢ ـ ٣)

يسمى التطبيق ت : سـ ⟵ صـ

١ ـ تطبيقاً شاملاً إذا كان كل عنصر من المجال المقابل صـ هو صورة لعنصر (واحد على الأقل) في المجال سـ ، وهذا يعني أنه لكل ص ∈ صـ يوجد س ∈ سـ بحيث ت (س) = ص ، أي أن مدى ت = صـ .

٢ـ تطبيقاً متبايناً إذا كانت العناصر المختلفة من سـ لها صور مختلفة من صـ، أي إذا لم يقترن عنصران مختلفان من سـ بعنصر واحد في سـ ، وهذا يعني أنه لكل $س_1$، $س_2 \in$ سـ، إذا كانت $س_1 \neq س_2$ فإن $ر(س_1) \neq ر(س_2)$ ، أو بعبارة أخرى مكافئة :

إذا كان $ر(س_1) = ر(س_2)$ فإن $س_1 = س_2$.

٣ ـ تقابلاً (أو تناظراً أحادياً) إذا كان متبايناً وشاملاً .

على ضوء هذا التعريف نستطيع أن نصنف التطبيقات في شكل (٢ـ٩) كما يلي :

التطبيق $ر_1$ تقابل .

التطبيق $ر_2$ متباين وليس شاملاً.

التطبيق $ر_3$ شامل وليس متبايناً.

التطبيق $ر_4$ ليس متبايناً وليس شاملاً.

تدريب (٢ ـ ٣)

تحقّق مما يلي :

(أ) في المثال (٢ ـ ١) ، التطبيق متباين وليس شاملاً.

في المثال (٢ ـ ٢) ، التطبيق ليس متبايناً وليس شاملاً .

في المثال (٢ ـ ٣) ، التطبيق تقابل وليس متبايناً .

في المثال (٢ ـ ٤) ، التطبيق تقابل.

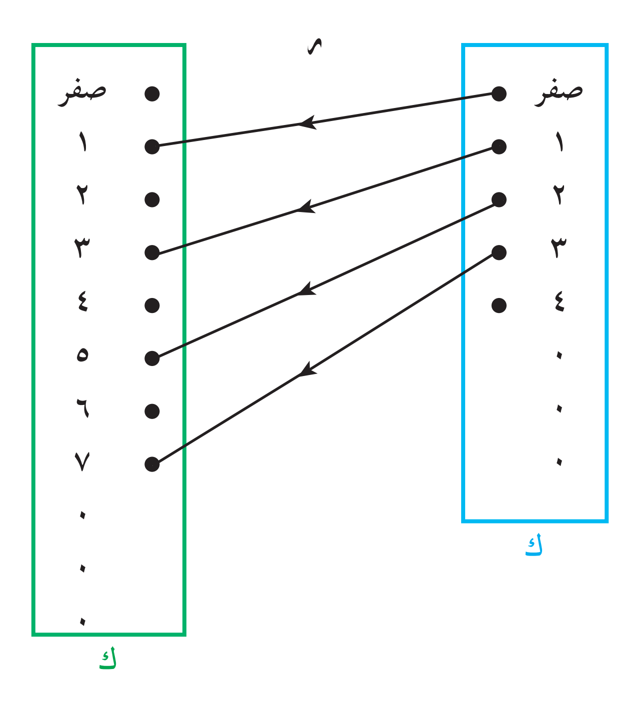
(ب) ادرس كل تطبيق من التطبيقات في الأمثلة (٢ ـ ٥) ـ (٢ ـ ٧) من حيث كونه (متبايناً ، شاملاً، تقابلاً) .

مثال (٢ ـ ٨)

إذا كان التطبيق $ر$: ك ← ك ، حيث ك مجموعة الأعداد الكلية ، معرفاً بالقاعدة :

$ر(ن) = ٢ن + ١$ ، لكل $ن \in$ ك فادرس نوعه.

الحـــل :



شكل (٢ ـ ١٠)

نلاحظ أولاً أن مدى م هو مجموعة الاعداد الطبيعية الفردية أي { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ..... } ، وهي مجموعة جزئية فعلية من المجال المقابل ك (انظر الشكل « ٢ ـ ١٠ »).

لذا فإن التطبيق م ليس شاملاً، استناداً إلى التعريف (٢ ـ ٣) ، وبالتالي فهو ليس تقابلاً .

من جهة أخرى لنفرض أن :

$ن_١ ، ن_٢ \in$ ك وأن م $(ن_١)$ = م $(ن_٢)$

$\Leftarrow$ ٢ $ن_١$ + ١ = ٢ $ن_٢$ + ١

$\Leftarrow$ ٢ $ن_١$ = ٢ $ن_٢$

$\Leftarrow$ $ن_١$ = $ن_٢$

$\Leftarrow$ م تطبيق متباين ، استناداً إلى التعريف (٢ ـ ٣).

مثال (٢ ـ ٩)

إذا كان التطبيق م : صـ ⟵ ك ، حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة ، معرفاً بالقاعدة :

م (ن) = ن^٤ ، لكل ن ∈ صـ ،

فادرس نوعه.

نلاحـــــظ أن :

م (ـ ١) = (ـ ١)^٤ = ١ ، كذلك م (١) = ١^٤ = ١

⟸ م (−١) = م (١) على الرغم من كون ـ ١ ≠ ١ ، أي أنه يوجد عنصران مختلفان في المجال لهما الصورة نفسها. لذا فالتطبيق م غير متباين.

من جهة أخرى التطبيق م ليس شاملاً لأنه، على سبيل المثال ، ٣ ∈ ك (المجال المقابل) ولكن لا يوجد عنصر ن ∈ صـ بحيث ن^٤ = ٣ (أي بحيث م (ن) =٣).

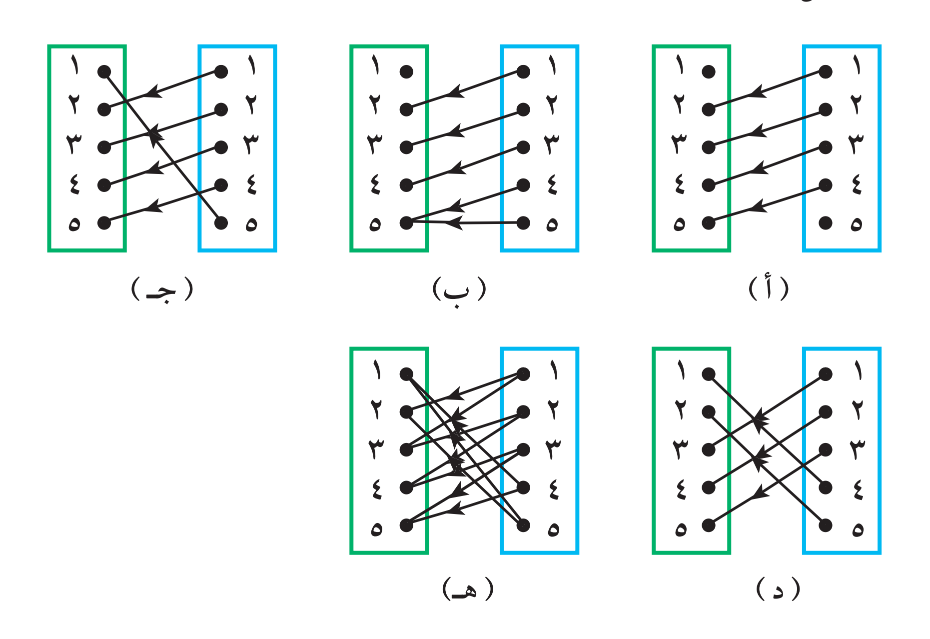
التطبيق م ليس تقابلاً ، استناداً إلى التعريف (٢ ـ ٣) .

تدريب (٢ ـ ٤)

نلاحظ أن وجود مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة ضمن مجال التطبيق م في المثال (٢ ـ ٩) أدى إلى كون التطبيق م غير متباين، هل يتغير نوع هذا التطبيق إذا اعتبرنا المجال مجموعة الأعداد الكلية ك بدلاً من صـ ؟ علل إجابتك.

تمـاريـــن (٢ ـ ٣)

١ـ بين أي الأشكال التالية تمثل تطبيقاً من المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } إلى نفسها، ثم أوجد مدى كل تطبيق وحدِّد ما إذا كان متبايناً، شاملاً.



٢ ـ ك = مجموعة الأعداد الكلية.

ط = مجموعة الأعداد الطبيعية .

م : ك ⟵ ط ، حيث م (ن) = ن + ٣.

(أ) أوجد صور الأعداد صفر ، ٣٨ ، ٥٩ ، ١٣ .

(ب) ارسم مخططاً سهمياً جزئياً للتطبيق م موضحاً صور الأعداد من صفر إلى ١٠ .

(جـ) هل يوجد عددٌ كلي تكون صورته أحد الأعداد ٢ ، ٣ ، ٥ ؟

إذا كان الجواب بنعم فأوجد ذلك العدد.

(د) ما هو مدى هذا التطبيق ؟

(هـ) هل التطبيق م متباين ؟ هل التطبيق م شامل؟ مع التعليل.

٣ ـ صـ = مجموعة الأعداد الصحيحة.

ر : صـ ← صـ ، حيث ر (ن) = ن − ٢

(أ) ارسم مخططاً سهمياً جزئياً لهذا التطبيق موضحاً فيه صور الأعداد −٥ ، −٤ ، −٣، −٢ ، −١ ، صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ .

(ب) أوجد جميع العناصر ن ∈ صـ التي تحقق :

ر (ن) = ٦

ر (ن) = ٧

ر (ن) = ١٢

ر (ن) = −٦

(جـ) حدد نوع هذا التطبيق من حيث كونه متبايناً أو شاملاً .

(د) هل التطبيق ر تقابل ؟

٤ ـ افرض أن :

سـ = {١ ، ٢ ، ٣}، صـ = {٤ ، ٥ ، ٦} ، ع = سـ ∪ صـ ، وأن :

ر : ع ← {صفر، ١} حيث

ر (س) =	١	إذا كان س ∈ سـ .
	صفراً	إذا كان س ∈ صـ .

(أ) أوجد ر (٤) ، ر (٣)، ر (٥).

(ب) هل ر تطبيق شامل ؟ علل إجابتك.

(جـ) هل ر تطبيق متباين ؟ علل إجابتك.

٥ ـ ر : صـ ← صـ بحيث ر (س) = س^{٣} −٦٤ .

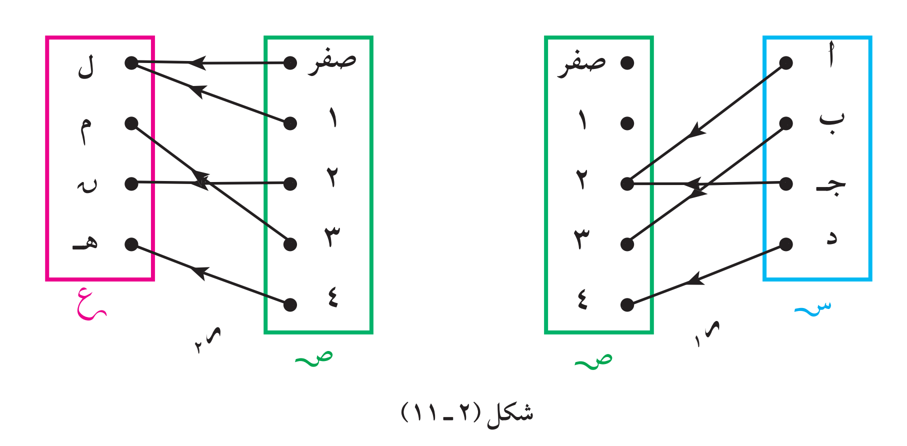
(أ) أوجد صور الأعداد صفر، −٢ ، −٥ ، ٢ ، ٧ في التطبيق ر .

(ب) هل التطبيق ر شامل ؟ علل إجابتك.

(جـ) أثبت أن التطبيق ر متباين.

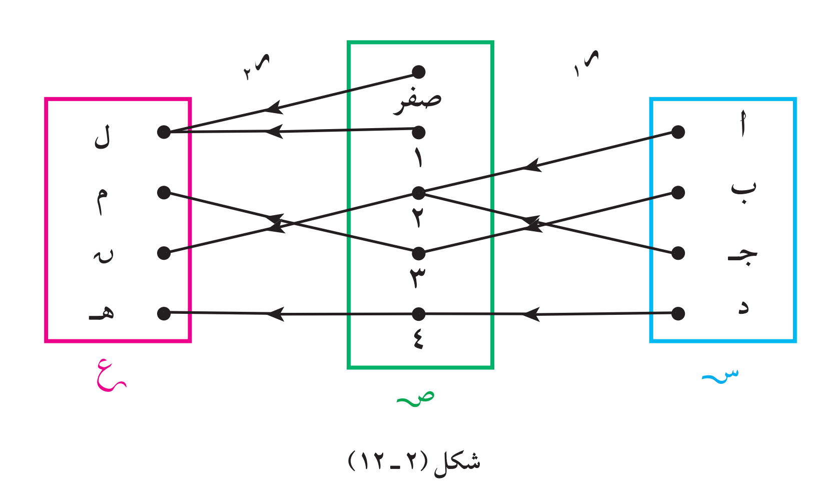
٢ ـ ٤ تحصيل (تركيب) التطبيقات

إذا كان لدينا التطبيقان $م_١$ ، $م_٢$ المعرَّفان بالمخططين كما في الشكل (٢ ـ ١١).



شكل (٢ ـ ١١)

فإننا نلاحظ أن مدى التطبيق $م_١$ مجموعة جزئية من مجال التطبيق $م_٢$ وعليه يمكن تمثيل التطبيقين معاً في مخطط واحد كما في الشكل (٢ ـ ١٢)

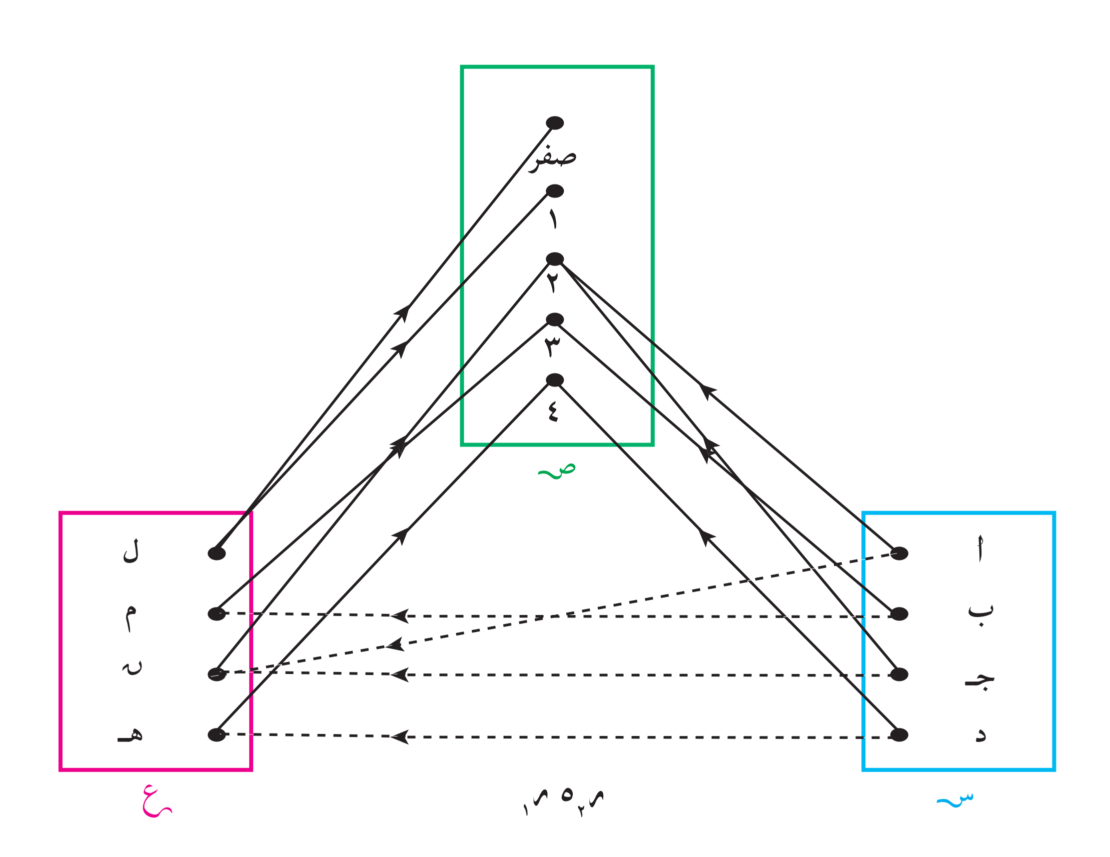


شكل (٢ ـ ١٢)

بما أن التطبيق $ت_1$ يُعيِّن لكل عنصر في س عنصراً واحداً في ص وأن $ت_2$ يعين لكل عنصر في ص عنصراً واحداً في ع ، إذن باستطاعتنا، عن طريق متابعة الأسهم من س إلى ص ومن ثم إلى ع ، أن نُعيِّن لكل عنصر في س العنصر (الوحيد) الذي يقع عند نهاية السهم في المجموعة ع.

هذه المجموعة الجديدة من التعيينات ممثلة بالأسهم المنقطة في الشكل (٢ ـ ١٣) تُعرِّف تطبيقاً من س إلى ع يسمى التطبيق المحصل (المركب) للتطبيقين $ت_1$ ، $ت_2$.

ويرمز له بالرمز $ت_2 \circ ت_1$



شكل (٢ـ١٣)

تعريف (٢ ـ ٤)

التطبيق المحصل للتطبيقين

$ر_{١}$: س ← ص

$ر_{٢}$: ص ← ع

وهو التطبيق $ر_{٢} \circ ر_{١}$: س ← ع ، المعرف بالقاعدة $ر_{٢} \circ ر_{١}$(س) = $ر_{٢}$($ر_{١}$ (س))

لكل س ∈ س.

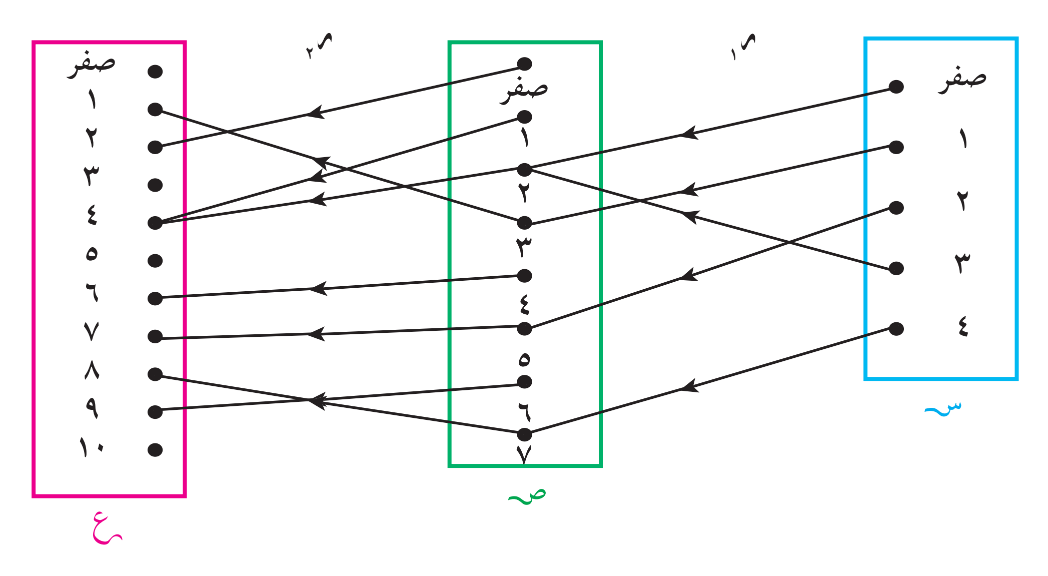
مثال (٢ ـ ١٠)

إذا كانت س = {صفر، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} .

ص = {صفر، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} .

ع = {صفر، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ } .

وكان $ر_{١}$: س ← ص ، $ر_{٢}$: ص ← ع ممثلين بالمخططين السهميين في الشكل (٢ ـ ١٤) .



شكل (٢ ـ ١٤)

فبمتابعة الأسهم في مخططي التطبيقين $م_١$ ، $م_٢$ ، نجد أن :

$م_١$ (صفر) = ٢ ∈ ص ، $م_٢$ (٢) = ٤ ∈ ع ،

أي أن صورة العنصر صفر ∈ س حسب التطبيق المحصل $م_٢ ه م_١$ هي ٤ ∈ ع ، أو بعبارة أخرى :

$م_٢ ه م_١$ (صفر) = $م_٢$ ($م_١$(صفر)).

= $م_٢$ (٢)

= ٤

وبالمثـــل

$م_٢ ه م_١$ (١) = $م_٢$ ($م_١$(١)).

= $م_٢$ (٣)

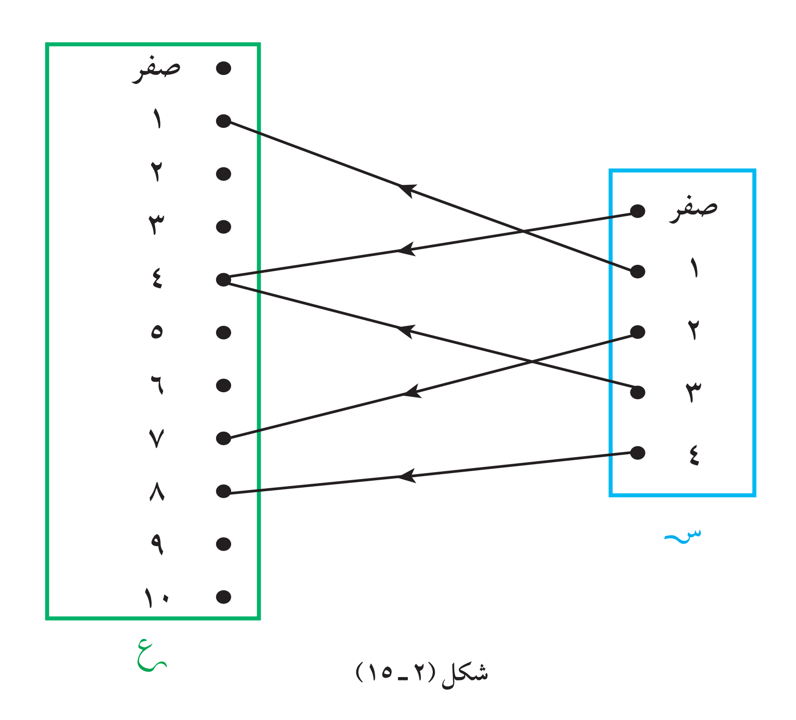
= ١

$م_٢ ه م_١$ (٢) = $م_٢$ ($م_١$ (٢)).

= $م_٢$ (٥)

= ٧

وهكذا ، بهذه الطريقة نحصل على المخطط السهمي للتطبيق $م_٢ ه م_١$ المبين في الشكل (٢ ـ ١٥).



شكل (٢ ـ ١٥)

لاحظ أن العناصر ٢ ، ٦ ، ٩ ∋ ع تنتمي إلى مدى التطبيق $\text{م}_٢$ ولكنها خارج مدى التطبيق المحصل $\text{م}_٢ \circ \text{م}_١$ لأنه لا توجد أسهم تبدأ من المجموعة س وتنتهي إلى ع.

فالعدد ٢ ∋ ع صورة تحت تأثير التطبيق $\text{م}_٢$ للعدد صفر ∋ ص الذي لا ينتمي إلى مدى التطبيق $\text{م}_١$ ، وكذلك الحال بالنسبة للعنصرين ٦ ، ٩ ∋ ع .

والآن نورد الملاحظات العامة التالية :

ملحوظة (٢ ـ ١)

١ ـ لكي نُعرِّف التطبيق $\text{م}_٢ \circ \text{م}_١$، لابد أن يكون مدى التطبيق $\text{م}_١$ مجموعة جزئية من مجال التطبيق $\text{م}_٢$.

٢ ـ مجال $\text{م}_٢ \circ \text{م}_١$ = مجال $\text{م}_١$.

٣ ـ المجال المقابل للتطبيق $\text{م}_٢ \circ \text{م}_١$ = المجال المقابل للتطبيق $\text{م}_٢$.

٤ ـ مدى $\text{م}_٢ \circ \text{م}_١$ مجموعة جزئية من مدى $\text{م}_٢$

سوف نكتشف بعد قليل أن تحصل التطبيقات بصورة عامة غير ابدالي، لكن قبل ذلك نحتاج إلى التعريف التالي :

تعريف (٢ ـ ٥)

نقول إن التطبيقين :

$\text{م}_١ : \text{س}_١ \longrightarrow \text{ص}_١$

$\text{م}_٢ : \text{س}_٢ \longrightarrow \text{ص}_٢$

متساويان ، إذا كان

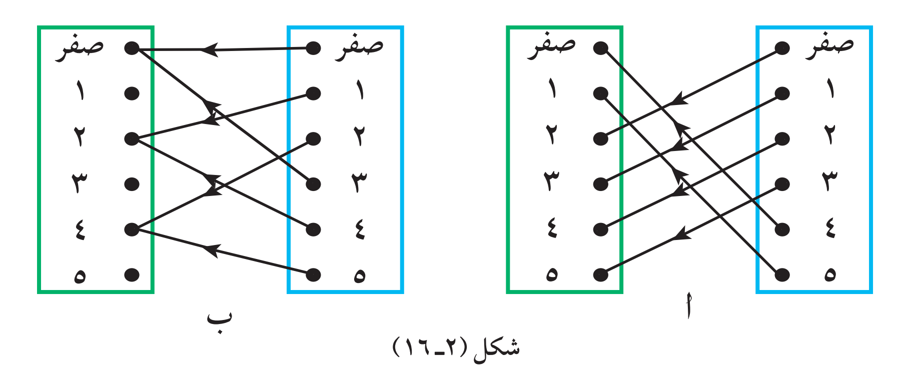
$\text{س}_١ = \text{س}_٢ ، \text{ص}_١ = \text{ص}_٢$

وكان $\text{م}_١(\text{س}) = \text{م}_٢(\text{س})$، لكل س ∋ $\text{س}_١$.

مثال (٢ ـ ١١)

التطبيقان أ ، ب من المجموعة { صفر، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } إلى نفسها ممثلان بالمخططين السهميين في الشكل (٢ ـ ١٦).

أوجد ب ٥ أ ، أ ٥ ب وقارن بينهما :



شكل (٢ـ١٦)

الحـــــلّ :

ب ٥ أ (صفر) = ب (أ (صفر))

= ب (٢)

= ٤

ب ٥ أ (١) = ب (أ (١))

= ب(٣)

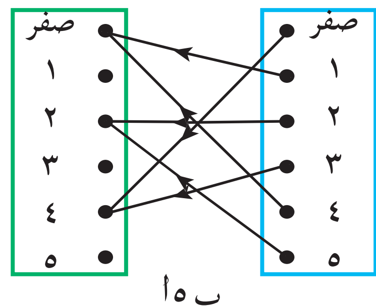
= صفر.

ب ٥ أ (٢) = ب (أ (٢))

= ب (٤)

= ٢

وهكذا بالطريقة نفسها نجد صور بقية العناصر في المجال ، لنحصل على المخطط السهمي للتطبيق ب ٥ أ كما في الشكل (٢ ـ ١٧).



شكل (٢ـ١٧)

وبالمثـــــل

أ ٥ ب (صفر) = أ (ب (صفر))

= أ (صفر)

= ٢

أ ٥ ب (١) = أ (ب (١))

= أ (٢)

= ٤

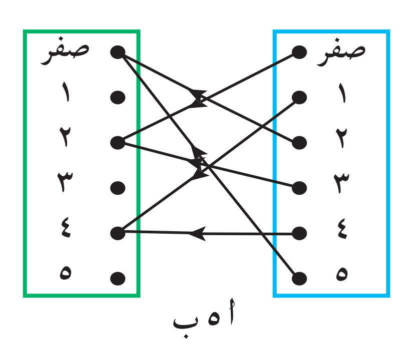
أ ٥ ب (٢) = (ب (٢))

= (٤)

= صفر

الآن تحقق من أن أ ٥ ب (٣) = ٢ ، أ ٥ ب (٤) = ٤

أ ٥ ب (٥) = صفر، لتحصل على المخطط السهمي المبين في الشكل (٢ ـ ١٨).



شكل (٢ـ١٨)

وبالمقارنة نجد أن :

أ ٥ ب ≠ ب ٥ أ ، استناداً إلى التعريف (٢ ـ ٥).

ملحـوظة (٢ ـ٢)

عملية تحصيل التطبيقات بصفة عامة غير إبدالية، كما يوضح ذلك المثال (٢ ـ ١١).

مثال (٢ ـ ١٢)

التطبيقان أ ، ب من ك إلى ك معرفان بالقاعدتين :

أ (ن) = $ن^٢$ + ٥.

ب (ن) = ن.

أثبت أن أ ٥ ب = ب ٥ أ ، ثم أوجد أ ٥ ب (٢)، أ ٥ ب (٧).

الحـــل :

أ ٥ ب = أ (ب (ن))

= أ (ن)

= $ن^٢$ + ٥ لكل ن ∈ ك .

كذلك ،

ب ٥ أ (ن) = ب (أ (ن))

ب ($ن^٢$ + ٥)

= $ن^٢$ + ٥، لكل ن ∈ ك .

بما أن مجال (أ ٥ ب) = مجال ب = ك .

مجال (ب ٥ أ) = مجال أ = ك.

فإن مجال (أ ٥ ب) = مجال (ب ٥ أ).

كذلك ، لاحظ أن المجال المقابل لـ (أ ٥ ب) = المجال المقابل لـ (ب ٥ أ)، لماذا ؟

لذا أ٥ ب = ب ٥ أ ، إستناداً إلى التعريف (٢ ـ ٥).

أ ٥ ب (٢) = $٢^٢$ + ٥.

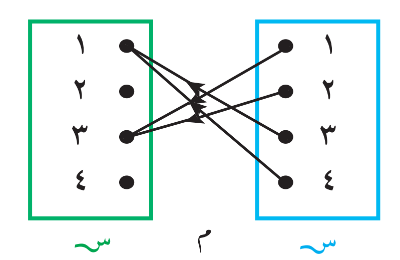
= ٩ .

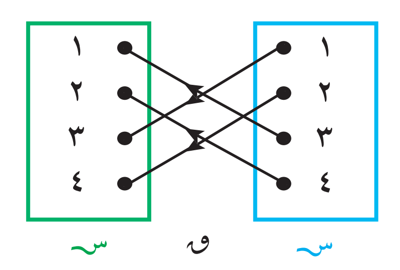
أ ٥ ب (٧) = $٧^٢$ + ٥

= ٥٤.

تمـــارين (٢ ـ ٤)

١ ـ افرض أن س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } وأن م ، ق تطبيقـان مـن س إلـى س معرفان بالمخططيـن السهميين :





(أ) أوجد (و ٥ م) (٣) ، (و ٥ م) (٤)

(ب) ارسم مخططاً سهمياً للتطبيق م ٥ و

(جـ) ارسم مخططاً سهمياً للتطبيق و ٥ م

(د) هل م ٥ ق = ق ٥ م ؟ وماذا تستنتج ؟

٢ ـ افـــرض أن :

م$_1$: ص ⟵ ص تطبيق بحيث م$_1$(س) = س^2 .

م$_2$: ص ⟵ ص تطبيق بحيث م$_2$(س) = س.

م$_3$: ص ⟵ ص تطبيق بحيث م$_3$ (س) = ١.

(أ) أوجد صور العناصر ٣ ، ٥ ، −٧ ، س −١ في التطبيق م$_1$ ٥ م$_2$

(ب) أوجد صور العناصر ٣ ، ٥ ، −٧، س − ١ في التطبيق م$_2$ ٥ م$_1$

(جـ) أوجد صور العناصر ٤ ، ٥ ، −٩ ، س + ٣ في التطبيق م$_3$ ٥ م$_1$

(د) أوجد صور العناصر ٤ ، ٥ ، −٩ ، س − ٣ في التطبيق م$_1$ ٥ م$_3$

(هـ) هل م$_1$ ٥ م$_2$ = م$_2$ ٥ م$_1$ ؟ ولماذا ؟

(و) هل م$_1$ ٥ م$_3$ = م$_3$ ٥ م$_1$ ؟ ولماذا ؟

٣ ـ إذا كانت م ، ق، هـ تطبيقات من ك إلى ك معرفة على النحو التالي :

م (س) = ٣ س.

و (س) = س + ٢ .

هـ (س) = ٢ س + ١.

فأوجد ما يلي :

(أ) (م ٥ و) (٦). (ب) (و ٥ و) (صفر). (جـ) (م ٥ م) (صفر).

(د) (و ٥ هـ) (٤). (هـ) و(٣س). (و) هـ (س-١) حيث س ∋ ط.

(ز) (م ٥ و) (س^{٢}). (ح) (هـ ٥ م) (٤١). (ط) (م ٥ هـ) (٤١).

(ي) م ٥ (و ٥ هـ) (٤١). (ك) (م ٥ و) ٥هـ (٤١).

٤ ـ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { صفر، ٤ ، ٥ } ، ع = { ٦ ، ٧ }. وكان $م_١$ ، $م_٢$ معرفين كما يلي :

$م_١$: س ← ص بحيث $م_١$ (١) = ٤ ، $م_١$ (٢) = صفر ، $م_١$ (٣) = ٥.

$م_٢$: ص ← ع بحيث $م_٢$ (صفر) = ٦ ، $م_٢$ (٤) = ٦ ، $م_٢$ (٥) = ٧ .

فأجب عما يلي :

(أ) أوجد التطبيق $م_٢$ ٥ $م_١$ ثم اكتب تعريفاً له.

(ب) ارسم المخطط السهمي لتطبيق $م_٢$ ٥ $م_١$.

(جـ) ما هو مدى التطبيق $م_٢$ ٥ $م_١$ ؟

٥ ـ إذا كانت ح مجموعة الأعداد الحقيقية وكان :

$م_١$: ح ← ح معرفاً بالقاعدة $م_١$ (س) = ٣ س -٢.

$م_٢$: ح ← ح معرفاً بالقاعدة $م_٢$ (س) = س^{٢} + ٣.

فأوجد $م_٢$ ٥ $م_١$ ، $م_١$ ٥ $م_٢$ وقارن بينهما.

٦ ـ إذا كان $م_١$: س ← ص تطبيقاً متبايناً .

$م_٢$: ص ← ع تطبيقاً متبايناً .

فأثبت أن $م_٢$ ٥ $م_١$: س ← ع تطبيق متباين.

٧ ـ إذا كان $م_١$: س ← ص تطبيقاً شاملاً.

$م_٢$: ص ← ع تطبيقاً شاملاً.

فأثبت أن $م_٢$ ٥ $م_١$: س ← ع تطبيق شامل.

٨ ـ إذا كان $م_١$: س ← ص ،

$م_٢$: ص ← ع ،

$م_٣$: ع ← ف ثلاث تطبيقات ،

فأثبت أن $م_٣$ ٥ ($م_٢$ ٥ $م_١$) = ($م_٣$ ٥ $م_٢$) ٥ $م_١$ وماذا تستنتج؟

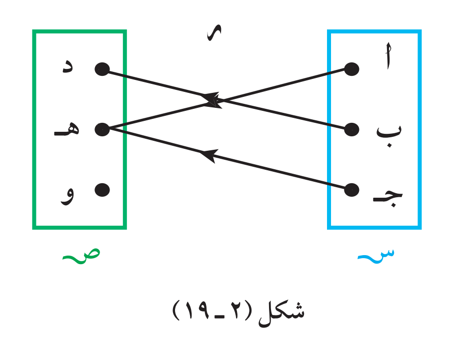
٢ ـ ٥ معكوس التطبيق :

تعريف (٢ ـ ٦)

١ ـ إذا كان م : س ← ص تطبيقاً وكان ص ∈ ص فإن الصورة العكسية للعنصر ص هي مجموعة عناصر المجموعة التي ترتبط بالعنصر ص بواسطة التطبيق م ، أي أن : الصورة العكسية للعنصر ص هي : { س : س ∈ س ، م (س) = ص } .

٢ ـ إذا كانت و ⊂ ص ، فإن الصورة العكسية للمجموعة و تحت تأثير التطبيق م هي : { س : س ∈ س ، م (س) ∈ و } .

في الشكل (٢ ـ ١٩) نلاحظ أن :



شكل (٢ ـ ١٩)

الصورة العكسية للعنصر د هي { ب } ،
الصورة العكسية للعنصر هـ هي { أ ، جـ } ،
الصورة العكسية للعنصر و هي ∅ .

كذلك نلاحظ أن :

الصورة العكسية للمجموعة { د ، هـ } هي { أ ، ب ، جـ } = س ،

الصورة العكسية للمجموعة {د، و} هي {ب}،
الصورة العكسية للمجموعة {د، هـ، و} هي {أ، ب، جـ} = س .

مثال (٢ ـ ١٣)

إذا كان التطبيق م : ح ← ح معرفاً بالقاعدة :
م (س) = ٣ + ٢ س ، حيث ح مجموعة الأعداد الحقيقية، فأوجد الصورة العكسية للعنصرين
−١ ، ٥ وكذلك للمجموعتين
{ص : ١ ⩽ ص < ٧} ، {ص : ص ⩽ ١} .

الحـــل :

الصورة العكسية للعنصر −١ هي مجموعة الأعداد الحقيقية س التي تحقق :
م (س) = −١ ،
أي أن ٣ + ٢ س = −١ ⇐ ٢س = −٤
⇐ س = −٢،
لذا فإن الصورة العكسية للعنصر −١ هي {−٢} .
بصورة مشابهة تأكد أن الصورة العكسية للعنصر ٥ هي {١} .
الصورة العكسية للمجموعة {ص : ١ ⩽ ص < ٧} هي مجموعة الأعداد الحقيقية س
التي تحقق :

١ ⩽ ٣ + ٢س < ٧.

⇐ −٣ + ١ ⩽ ٢س < ٧ − ٣ ⇐ −٢ ⩽ ٢س < ٤.

⇐ $\frac{-٢}{٢}$ ⩽ س < $\frac{٤}{٢}$ ⇐ −١ ⩽ س < ٢.

لذا فإن

الصورة العكسية المطلوبة هي $\{$ س : $-١ \leqslant$ س < ٢ $\}$

الصورة العكسية للمجموعة $\{$ ص : ص $\leqslant ١$ $\}$

$=$ $\{$ س : $٣ + ٢$ س $\leqslant ١$ $\}$

$=$ $\{$ س : ٢س $\leqslant ١ - ٣$ $\}$

$=$ $\{$ س : ٢س $\leqslant -٢$ $\}$

$=$ $\{$ س : س $\leqslant -١$ $\}$

استناداً لما سبق نورد ما يلي :

ملحوظة (٢ ـ ٣)

١ ـ بوجه عام، إذا كان م : سـ ⟵ صـ تطبيقاً فإن الصورة العكسية للعنصر ص ∈ صـ قد تكون المجموعة الخالية أو مجموعة مكونة من عنصر واحد أو مجموعة مكونة من أكثر من عنصر.

٢ ـ إذا كان التطبيق م : س ⟵ صـ تقابلاً فإن الصورة العكسية لكل عنصر ص ∈ صـ تكون مجموعة مكونة من عنصر واحد س ∈ سـ ، بحيث م (س) = ص .

وفي هذه الحالة يمكن تعريف تطبيق من صـ إلى سـ يربط كل عنصر ص ∈ صـ بعنصر واحد فقط في سـ هو صورته العكسية في سـ. يرمز لهذا التطبيق بالرمز $م^{-١}$ ، أي أن :

$م^{-١}$: صـ ⟵ سـ تطبيق بحيث $م^{-١}$ (ص) = س.

نسمي $م^{-١}$ التطبيق العكسي للتطبيق م ، أو معكوس التطبيق م ، ولعلك تلاحظ أن $م^{-١}$ هو تقابل أيضاً.

مما تقدم نجد أنه لكل تقابل م تقابل عكسي $م^{-١}$ ، لماذا ؟

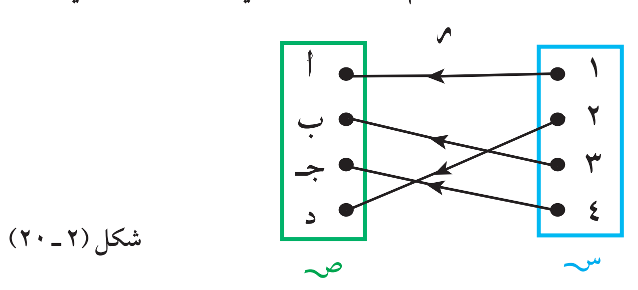
٣ ـ إذا كان م : س ⟵ صـ تقابلاً وكان لدينا مخططه السهمي، فللحصول على التطبيق العكسي $م^{-١}$: ص ⟵ سـ نغير اتجاه الأسهم فقط.

تدريب (٢ ـ ٥)

ارسم المخطط السهمي للتطبيق العكسي في المثال (٢ ـ ٤) . راجع التدريب (٢ ـ ٣).

مثال (٢ ـ ١٤)

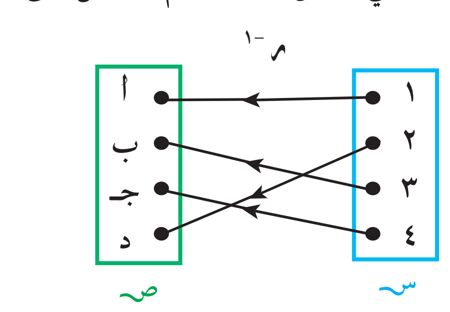
إذا كان التطبيق $م$: $س \leftarrow ص$ ممثلاً بالمخطط السهمي في الشكل (٢ ـ ٢٠)، فهل يوجد معكوس لهذا التطبيق ؟ وارسم المخطط السهمي للتطبيق العكسي إن وجد .



شكل (٢ ـ ٢٠)

الحـــلّ :

يتضح من المخطط السهمي للتطبيق $م$ أنه تقابل، إذن فالتطبيق $م^{-1}$ موجود . وللحصول على مخططه السهمي نعكس اتجاه الأسهم فنحصل على الشكل (٢ ـ ٢١).



شكل (٢ ـ ٢١)

الصورة العكسية للعنصر أ هي { ١ } ،
والصورة العكسية للعنصر ب هي { ٣ } ،
والصورة العكسية للعنصر جـ هي { ٤ }،
والصورة العكسية للعنصر د هي { ٢ }،
ونرمز لذلك ، على الترتيب ، بما يلي :

$م^{-1}$ (أ) = ١ ، $م^{-1}$ (ب) = ٣

$م^{-1}$ (جـ) = ٤ ، $م^{-1}$ (د) = ٢

مثال (٢ ـ ١٥)

إذا كان ت : ع ← ع معرفاً بالقاعدة :

ت (س) = $س^٢$

فما هي الصورة العكسية للعنصر ٩ ؟ وهل لهذا التطبيق معكوس مع ذكر السبب ؟

الحــــلّ :

ت (س) = ٩ ⇐ $س^٢$ = ٩ ⇐ س= ± ٣ .

إذن الصورة العكسية للعدد ٩ هي { −٣ ، ٣ } ، أي أن $ت^{-١}$ (٩) = { −٣ ، ٣ } ،

من هذا يتضح أن ت ليس تطبيقاً متبايناً وبالتالي ليس تقابلاً ، وعليه فليس له معكوس.

مثال (٢ ـ ١٦)

أثبت أن التطبيق ت : ع ← ع المعرف بالقاعدة :

ت (س) = ٣ + ٢ س

تقابل ثم أوجد معكوسه . انظر المثال (٢ ـ ١٣).

الحــــلّ :

نترك للطالب إثبات أن التطبيق ت تقابل.

لإيجاد المعكوس نفرض أن ص ∋ ع أي عنصر في المجال المقابل للتطبيق ت .

الصورة العكسية لهذا العنصر هي المجموعة

{ س ∋ ع : ت (س) = ص } = { س ∋ ع : ٣ + ٢س = ص } .

= { س ∋ ع : س = $\frac{١}{٢}$ (ص − ٣) }

إذن

$ت^{-١}$ (ص) = س

= $\frac{١}{٢}$ (ص − ٣) ،

وحيث أن ص أي عدد حقيقي فبالإمكان أن نضع محلَّه المتغير س إذن التطبيق العكسي هو :

$م^{-1}$: ع ⟵ ع ، حيث

$م^{-1}$ (س) = $\frac{1}{2}$ (س − ٣) ، لكل س ∈ ع

ملحوظة (٢ ـ ٤)

لإيجاد $م^{-1}$ (إن أمكن) علينا أن نحل المعادلة

م (س) = ص.

ونوجد س بدلالة ص لنحصل بذلك على $م^{-1}$ (ص) ، ومن ثم نغير ص إلى س ، كما في المثال (٢ ـ ١٦).

مثال (٢ ـ ١٧)

إذا كان التطبيق م : ع ⟵ ع معرفاً بالقاعدة ؛

م (س) = ١ + ٢ س + $س^{٢}$

فما الصورة العكسية للعنصر ٣٦ ؟ وهل لهذا التطبيق معكوس ؟

الحـــلّ :

م (س) = ٣٦.

⇐ ١ + ٢س +$س^{٢}$ = ٣٦

⇐ ١+ ٢س + $س^{٢}$ − ٣٦ = صفر

⇐ $س^{٢}$ + ٢س − ٣٥ = صفر

⇐ (س ـ ٥) (س +٧) = صفر

⇐ س = ٥ أو س = −٧

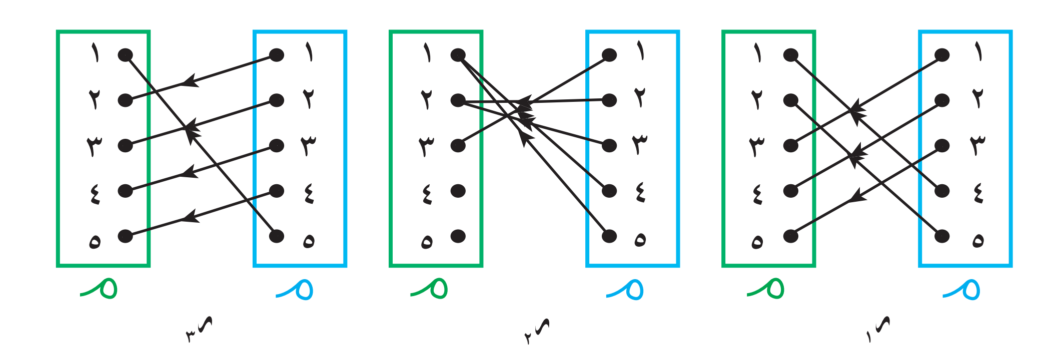
إذن

الصورة العكسية للعدد ٣٦ هي { -٧ ، ٥ }.

وبالتالي فإن التطبيق م ليس متبايناً مما يقتضي عدم وجود $م^{-١}$.

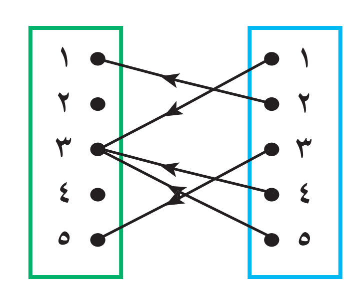
تمـــارين (٢ ـ ٥)

١ ـ إذا كانت ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } وكانت التطبيقات $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ من ص إلى ص معرَّفة بالمخططات التالية :



فأي من هذه التطبيقات له معكوس ؟ ارسم المخطط السهمي لكل تطبيق عكسي.

٢ ـ إذا كان التطبيق م من المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } إلى نفسها معرفاً بالمخطط السهمي.



فأوجد الصور العكسية لكل من :

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) { ٣ ، ٤ } (هـ) { ٣ ، ٤ ، ٥ }

٣ ـ إذا كان التطبيق م ؛ ع ← ع معرفاً بالقاعدة م (س) = $س^٢$ فأوجد الصور العكسية لكل

من :

(أ) الصفر (ب) ١٦ (جـ) {١ ، ٩} (د) - ١

٤ ـ إذا كان م : ع ← ع معرفاً بالقاعدة م (ن) = ٣ ن + ١ لكل ∋ ع فهل يوجد $م^{-١}$ ؟

استنتج القاعدة التي تعرف $م^{-١}$ إن وجد .

٥ ـ إذا كان التطبيق :

م : {-٣ ، -٢ ، -١ ، صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ } ← {٢٧ ، ١ ، ٨ ، -٢٧، صفر ، -١ ، -٨ }

معرفاً بالقاعدة :

م (س) = $س^{٣}$ فأجب عما يلي :

(أ) أوجد م (-٣)، م (-١)، م (صفر)، م (٣).

(ب) أثبت أن التطبيق م متباين وشامل ثم استنتج القاعدة التي تعرف $م^{-١}$.

(جـ) أوجد م ٥ $م^{-١}$ (٨)

م ٥ $م^{-١}$ (صفر)

م ٥ $م^{-١}$ (-٢٧).

م ٥ $م^{-١}$ (ص) حيث ص ∋ {٢٧ ، ١ ، ٨ ، -٢٧ ، صفر ، -١ ، -٨ } .

(د) أوجد $م^{-١}$ ٥ م (١)

$م^{-١}$ ٥ م (-٣)

$م^{-١}$ ٥ م (٢)

$م^{-١}$ ٥ م (س) حيث س ∋ {-٣ ، -٢ ، -١ ، صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ } .

(هـ) استنتج تعريف التطبيق $م^{-١}$ ٥ م ، م ٥ $م^{-١}$. هل هما متساويان ؟ ولماذا ؟

٦ ـ ليكن م : ك ← ص تطبيقاً معرفاً بالقاعدة :

م (ن) = $ن^{٢}$ + ٢ ن + ١.

هل هذا التطبيق له معكوس ؟ ولماذا ؟

تمــاريــن عامــــة

١ ـ م : صـ ← صـ تطبيق معرف بالقاعدة $م(ن) = ن^٢ + ١$.

(أ) أوجد صور الأعداد صفر ، −١ ، ٧ .

(ب) أوجد الصور العكسية لكل من الأعداد ١ ، صفر ، ٥ ، ١٠ ، −٢ .

(جـ) أوجد مدى التطبيق م .

(د) هل التطبيق م متباين ؟ هل هو شامل ؟

٢ ـ إذا كان التطبيق د : صـ ← صـ معرفاً بالقاعدة :

د (ن) = ن −١.

والتطبيق م هو التطبيق المعرف في تمرين (١) فأجب عما يلي :

(أ) هل م ٥ د تطبيق ؟ وإذا كان تطبيقاً فعبر عن (م ٥ د) (ن) بدلالة ن حيث ن ∈ صـ .

(ب) هل د ٥ م تطبيق ؟ حدد القاعدة التي تُعرِّفه في حالة الإيجاب.

(جـ) هل د ٥ د تطبيق ؟ أوجد مدى هذا التطبيق إن وجد ، وارسم المخطط السهمي غير الكامل له موضحاً صور الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ .

٣ ـ إذا كان ل : ح ← ح معرفاً بالقاعدة $ل(س) = س^٢ - ١$.

فأوجد الصور العكسية لكل من :

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) {ص : −١ ⩽ ص ⩽ ٨ } .

(د) {ص : −٥ ⩽ ص ⩽ ٢ }

٤ ـ إذا كانت سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

صـ = { −٢ ، −١ ، صفر ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

وكان م : سـ ← صـ تطبيقاً معرفاً بالمخطط السهمي كما في الشكل التالي :

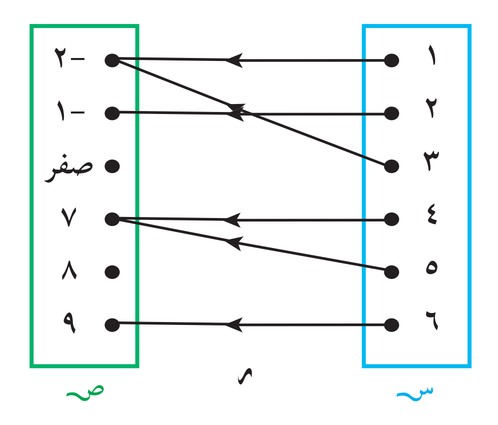
وكانت $سـ_١$ ، $سـ_٢$ ⊃ سـ ، $صـ_١$ ، $صـ_٢$ ⊃ صـ حيث

$سـ_١$ = {٣ ، ٤ ، ٥ }.

$سـ_٢$ = {١ ، ٢ ، ٤ }.

$صـ_١$ = {−١ ، ٧ ، ٨ }.

$صـ_٢$ = {−٢ ، −١ ، صفر }.



فأوجد ما يلي :

ر(٤) ، $ر^{-1}$ (-٢) ، $ر^{-1}$ (٨) ، $ر^{-1}$ ($ص_1$~) ، ر ($س_1$~) ، ر ($س_2$~) ،

ر ($س_1$~ ∪ $س_2$~) ، ر ($س_1$~) ∪ ر ($س_2$~) ، $ر^{-1}$ ($ص_1$~ ∪ $ص_2$~) ، $ر^{-1}$ ($ص_1$~ ∩ $ص_2$~) ،

$ر^{-1}$ ($ص_1$~) ∩ $ر^{-1}$ ($ص_2$~)

مانوع التطبيق المعروف بالشكل أعلاه ؟

٥ ـ ليكن :

$ر_1$: ع ← ع تطبيقاً معرفاً بالقاعدة $ر_1$ (س) = $س^2$ – ٢ .

$ر_2$: ع ← ع تطبيقاً معرفاً بالقاعدة $ر_2$ (س) = س +١ .

(أ) أوجد تعريفاً لكل من التطبيقين $ر_2$ ٥ $ر_1$ ، $ر_1$ ٥ $ر_2$.

(ب) أوجد ($ر_1$ ٥ $ر_2$) (٣) ، ($ر_2$ ٥ $ر_1$) (٣) وماذا تستنتج ؟

(جـ) أوجد ($ر_1$ ٥ $ر_2$) (-١) ، ($ر_2$ ٥ $ر_1$) (-١).

٦ ـ متى يكون معكوس التطبيق تطبيقاً ، حدد نوع هذا المعكوس ؟

٧ ـ أي العبارات الآتية صائبة وأيها خاطئة ؟

(أ) معكوس كل تطبيق شامل تطبيق .

(ب) معكوس كل تطبيق متباين تطبيق .

(جـ) معكوس كل تطبيق تقابل تطبيق شامل وليس متبايناً .

(د) معكوس التطبيق الشامل علاقة.

٨ ـ ليكن $ر$: ع ⟵ ع تطبيقاً معرفاً بالقاعدة :

$ر$ (س) = س + ١.

(أ) هل هذا التطبيق متباين ؟ شامل ؟ تقابل ؟

(ب) هل $ر^{-١}$ موجود ؟ وإذا كان موجوداً فعرِّف $ر ٥ ر^{-١}$ ، $ر^{-١} ٥ ر$ وماذا نستنتج ؟

٩ ـ إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } وكان $ر_١$ ، $ر_٢$ تطبيقين من المجموعة سـ إلى نفسها كما يلي :

$ر_١$ (١) = ١ ، $ر_١$(٢) = ٣ ، $ر_١$(٣) = ٢

$ر_٢$ (١) = ٣ ، $ر_٢$(٢) = ١ ، $ر_٢$(٣) = ٢

فأثبت أن :

$(ر_٢ ٥ ر_١)^{-١} = ر_١^{-١} ٥ ر_٢^{-١}$

١٠ ـ إذا كان $ر$: ع ⟵ ع تطبيقاً معرفاً بالقاعدة :

$ر$ (س) = ٨ $س^٣$ − ٢٧.

فأثبت أن $ر$ تقابل وأوجد $ر^{-١}$.

١١ ـ إذا كانت سـ = {أ ، ب ، جـ} ، صـ = {١ ، ٢ } فما هي التطبيقات المختلفة من سـ إلى صـ ؟ كم عددها ؟

١٢ ـ إذا كانت سـ مجموعة عدد عناصرها م، صـ مجموعة عدد عناصرها ن ، فكم تتوقع عدد التطبيقات المختلفة من سـ إلى صـ ؟

١٣ ـ إذا كان $ر_١$: سـ ⟵ صـ تقابلاً وكان $ر_٢$: صـ ⟵ ع تقابلاً فأثبت أن $ر_٢ ٥ ر_١$: سـ ⟵ ع تقابل .

(إرشاد : استعن بنتيجة التمرينين (٦) ، (٧) من التمارين «٢ ـ ٤»).

الباب الثالث

الهندسة المستوية

٣ ـ ١ تشابه المضلعات .

٣ ـ ٢ المضلعات المنتظمة.

٣ ـ ٣ قياس الزوايا ومساحة قطاع دائري .

٣ ـ ١ تشابه المضلعات

تعريف (٣ ـ ١)

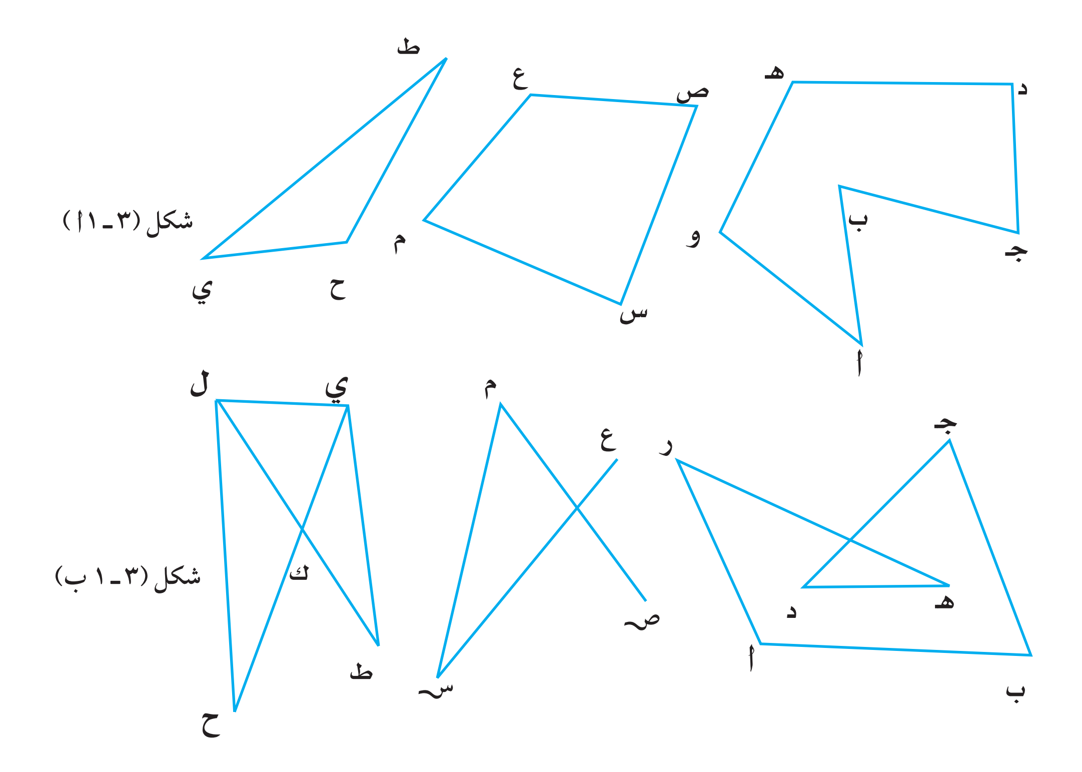
المضلع هو اتحاد ثلاث قطع مستقيمة أو أكثر في المستوي ، بحيث أن :

(أ) القطع المستقيمة تتقاطع عند أطرافها فقط،

(ب) كل طرف ينتمي إلى قطعتين مستقيمتين فقط،

(جـ) لا توجد قطعتان مستقيمتان، تشتركان في طرف واحد، على استقامة واحدة.

تمثل الأشكال في الشكل (٣ ـ ١أ) مضلعات، بينما تلك التي في الشكل (٣ ـ ١ ب) لا تمثل مضلعات، فلماذا؟



شكل (٣ ـ ١أ)

شكل (٣ ـ ١ ب)

تسمى القطع المستقيمة الداخلة في تركيب المضلع أضلاع هذا المضلع، كما تسمى أطراف أضلاعه رؤوس هذا المضلع.

من الملاحظ أن كل رأسين متتاليين هما طرفا ضلع وكل ضلعين متجاورين يشتركان في رأس واحد.

تسمى كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين من مضلع قطراً لهذا المضلع.

تدريب (٣ ـ ١)

عين رؤوس وأضلاع كل من المضلعات الواردة في شكل (٣ ـ ١أ) وارسم أقطارها، ثم اعط في كل منها أمثلة على رأسين متتاليين وعلى ضلعين متجاورين.

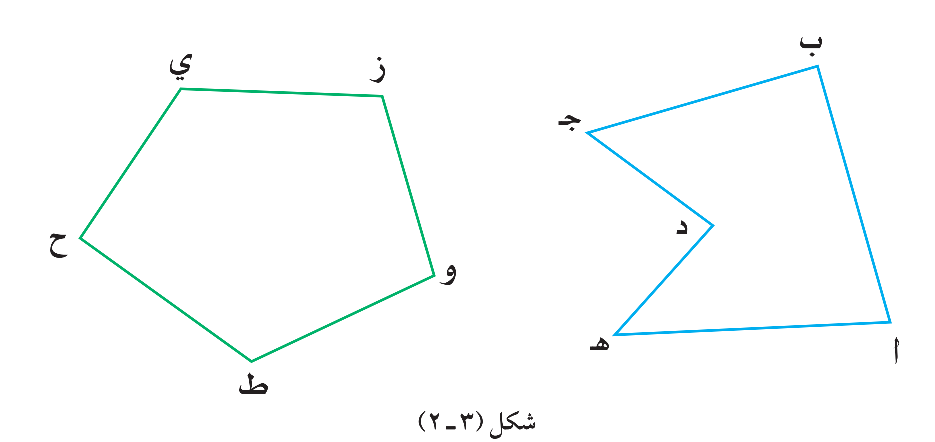
محيط الضلع هو مجموع أطوال أضلاعه.

كل قطاع زاوي محدد بضلعين متجاورين في مضلع مثل [أ ب، ^ أ و]، كما في شكل (٣ ـ ١أ)، يسمى زاوية لهذا المضلع رأسها أ (رأس في المضلع أ ب جـ د هـ و).

المضلع المحدب والمضلع المقعر

نقول عن مضلع ما أنه محدب إذا وقع بكامله في جهة واحدة بالنسبة لكل مستقيم يحوي ضلعاً من أضلاعه، أما إذا لم يتحقق ذلك فإننا نسميه مضلعاً مقعراً.

ففي الشكل (٣ ـ ٢) نلاحظ أن المضلع أ ب جـ د هـ مقعر بينما المضلع وزي ح ط محدب.



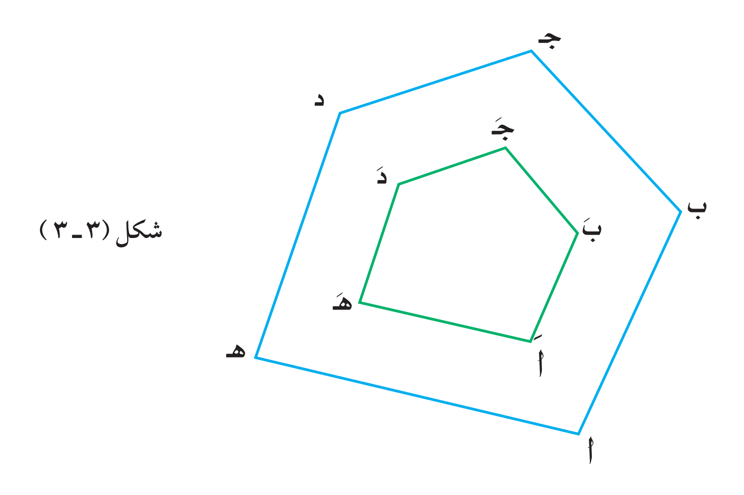
شكل (٣ ـ ٢)

ملاحظة (٣ ـ ١)

إذا ذكرنا مضلعاً فإننا نعني المضلع المحدب.

تشابه المضلعات

لو نظرنا إلى المضلعين أ ب جـ د هـ، أَ بَ جَ دَ هَ في الشكل (٣ ـ ٣) نلاحظ أن الأول هو صورة مكبرة بنسبة معينة للثاني، ولو أجرينا القياس لوجدنا.



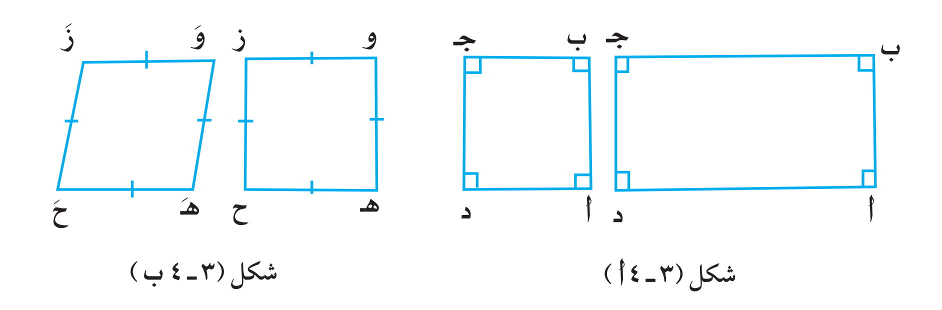
شكل (٣ ـ ٣)

أولاً أن $\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أَ بَ}|} = \frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{بَ جَ}|} = \frac{|\text{جـ د}|}{|\text{جَ دَ}|} = \frac{|\text{د هـ}|}{|\text{دَ هَ}|} = \frac{|\text{هـ أ}|}{|\text{هَ أَ}|}$

وثانياً أن الزوايا المتناظرة بقيت متساوية ، أي أن

$\hat{\text{أ}} = \hat{\text{أَ}}$ ، $\hat{\text{ب}} = \hat{\text{بَ}}$ ، $\hat{\text{جـ}} = \hat{\text{جَ}}$ ، $\hat{\text{د}} = \hat{\text{دَ}}$ ، $\hat{\text{هـ}} = \hat{\text{هَ}}$

لاحظ في الشكل (٣ ـ ٤ أ) أنه بالرغم من تساوي الزوايا إلاّ أن المضلع الأول ليس صورة مكبرة (أو مصغرة) من المضلع الثاني وكذلك (شكل « ٣ ـ ٤ ب ») بالرغم من تناسب الأضلاع (تساويها) إلاّ أن المضلع الأول ليس صورة مكبرة (أو مصغرة) من المضلع الثاني ، لماذا؟



شكل (٣ ـ ٤ أ)　　　شكل (٣ ـ ٤ ب)

تعريف (٣ ـ ٢)

نقول عن مضلعين لهما العدد نفسه من الأضلاع أنهما متشابهان إذا تساوت زواياهما المتناظرة وتناسبت أضلاعهما المتناظرة.

من التعريف (٣ ـ ٢) نحصل على ما يلي :

١ ـ المضلعان المتطابقان متشابهان.

٢ ـ المضلعان المتشابهان لثالث متشابهان.

٣ ـ المضلع المطابق لأحد مضلعين متشابهين يشابه المضلع الآخر.

تعريف (٣ ـ ٣)

نسمي نسبة طولي ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين نسبة التشابه.

فإذا رمزنا بالرمز ث لنسبة تشابه المضلع أ ب جـ د هـ للمضلع أَ بَ جَـ دَ هَـ فإن :

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أَ بَ}|} = \frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{بَ جَـ}|} = \frac{|\text{جـ د}|}{|\text{جَـ دَ}|} = \frac{|\text{د هـ}|}{|\text{دَ هَـ}|} = \frac{|\text{هـ أ}|}{|\text{هَـ أَ}|} = \text{ث}$$

وتكون نسبة تشابه المضلع أَ بَ جَـ دَ هَـ للمضلع أ ب جـ د هـ مساوية $\frac{١}{\text{ث}}$

تلافياً للخطأ وتسهيلاً لكتابة النسب المتساوية بين الأضلاع المتناظرة لمضلعين متشابهين، من المناسب كتابة رموز هذين المضلعين بطريقة يستدل بها على التناظر، أي بحيث يكون ترتيب الرؤوس المتناظرة واحداً، فعلى سبيل المثال إذا كان المضلع أ ب جـ د يشابه المضلع هـ و ز ح حيث :

$\hat{أ} = \hat{هـ}$ ، $\hat{ب} = \hat{و}$ ، $\hat{جـ} = \hat{ز}$ ، $\hat{د} = \hat{ح}$ فإن

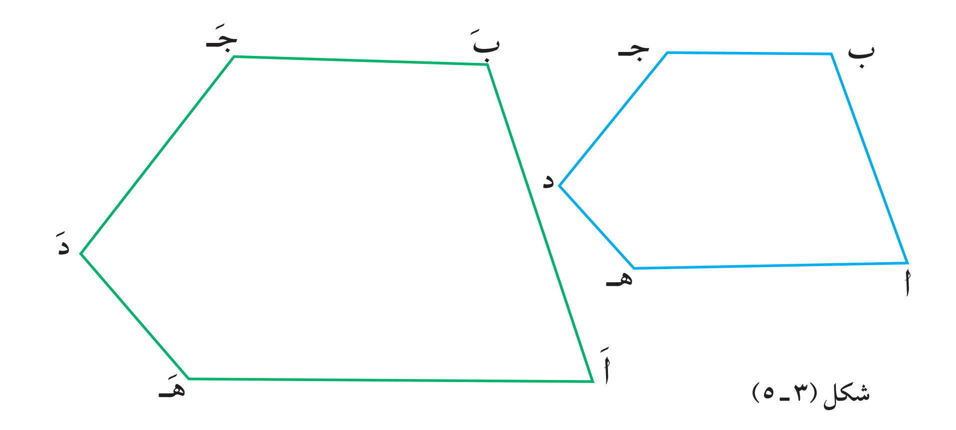
$$\frac{|أ ب|}{|هـ و|} = \frac{|ب جـ|}{|و ز|} = \frac{|جـ د|}{|ز ح|} = \frac{|د أ|}{|ح هـ|}$$

نظرية (٣ ـ ١)

إذا تشابه مضلعان فإن نسبة محيطيهما تساوي نسبة التشابه.

المفروض

المضلعان أ ب جـ د هـ ، أَ بَ جَـ دَ هَـ متشابهان ، نسبة تشابه الأول إلى الثاني تساوي ث ومحيطاهما م ، مَ على التوالي ، كما في الشكل (٣ ـ ٥).



شكل (٣ ـ ٥)

المطلوب إثباته : $\frac{مَ}{م} = ث$

البرهــــان

المضلعان متشابهان فأضلاعهما متناسبة (تعريف « ٣ ـ ٣ ») ، أي أن :

$$\frac{|أ ب|}{|أَ بَ|} = \frac{|ب جـ|}{|بَ جـَ|} = \frac{|جـ د|}{|جـَ دَ|} = \frac{|د هـ|}{|دَ هـَ|} = \frac{|هـ أ|}{|هـَ أَ|} = ث$$

من خواص التناسب نجد أن :

$$\frac{|أ ب| + |ب جـ| + |جـ د| + |د هـ| + |هـ أ|}{|أَ بَ| + |بَ جـَ| + |جـَ دَ| + |دَ هـَ| + |هـَ أَ|} = ث$$ ، (لماذا؟)

لكن $م = |أ ب| + |ب جـ| + |جـ د| + |د هـ| + |هـ أ|$

$مَ = |أَ بَ| + |بَ جـَ| + |جـَ دَ| + |دَ هـَ| + |هـَ أَ|$

إذن : $\frac{م}{مَ} = ث$

مثال (٣ ـ ١)

المضلعان أ ب جـ د هـ ، أَ بَ جـَ دَ هـَ متشابهان فيهما $|أ ب| = ٢$سم، $|ب جـ| = ١$ سم ، $|جـ د| = ٣$ سم ، $|د هـ| = ٥$ سم ، $|هـ أ| = ٤$ سم ، $|أَ بَ| = ٤$ سم ، احسب محيط المضلع أَ بَ جـَ دَ هـَ

الحـــلّ :

نسبة تشابه المضلع الأول للمضلع الثاني $= \frac{|أ ب|}{|أَ بَ|} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$.

محيط المضلع الأول = م = ٢ + ١ + ٣ + ٥ + ٤ = ١٥ سم.

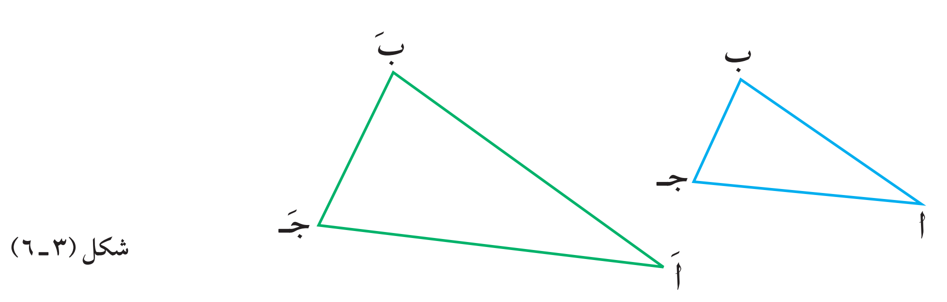
بما أن المضلعين متشابهان فإنه حسب نظرية (٣ ـ ١) :

$\frac{م}{مَ} = \frac{١}{٢}$ حيث مَ = محيط المضلع أَ بَ جـَ دَ هـَ

إذن $\frac{١٥}{مَ} = \frac{١}{٢}$ ، لذا مَ = ١٥ X ٢ = ٣٠ سم

العلاقة بين عناصر مثلثين متشابهين :

نعلم أن المثلث ما هو إلاَّ مضلَّع له ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا ، التعريف (٣ ـ ٢) لمضلعين متشابهين يتفق مع تعريف مثلثين متشابهين الذي تعلمته في الصف الثالث متوسط ، فإذا قلنا أن المثلثين أ ب جـ ، أَ بَ جَـ متشابهان ، كما في الشكل (٣ ـ ٦) ، فإن هذا يعني :



شكل (٣ ـ ٦)

١ ـ تساوي الزوايا المتناظرة ، أي أن $\hat{أ} = \hat{أَ}$ ، $\hat{ب} = \hat{بَ}$ ، $\hat{جـ} = \hat{جَـ}$

٢ ـ تناسب الأضلاع المتناظرة ، أي أن $\frac{|أ ب|}{|أَ بَ|} = \frac{|ب جـ|}{|بَ جَـ|} = \frac{|جـ أ|}{|جَـ أَ|}$

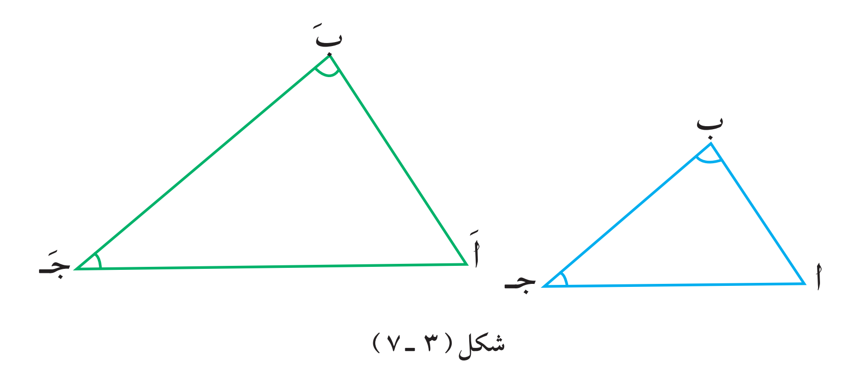
واستناداً إلى ما سبق دراسته في هذا المجال نجد أنه من السهل اكتشاف أنه في حالة المثلثات المتشابهة ، فإن توفر أحد الشرطين السابقين يعني تحقق الآخر ولعلك تتذكر الحالات الثلاث لتشابه مثلثين كما في الحقائق التالية :

حقيقة (٣ ـ ١)

يتشابه مثلثان إذا تساوت زوايا أحدهما مع زوايا الآخر المناظرة لها.

نتيجة (٣ ـ ١)

يتشابه مثلثان إذا تساوت زاويتان من أحدهما مع زاويتين من الآخر ، كما في الشكل (٣ ـ ٧)، لماذا؟



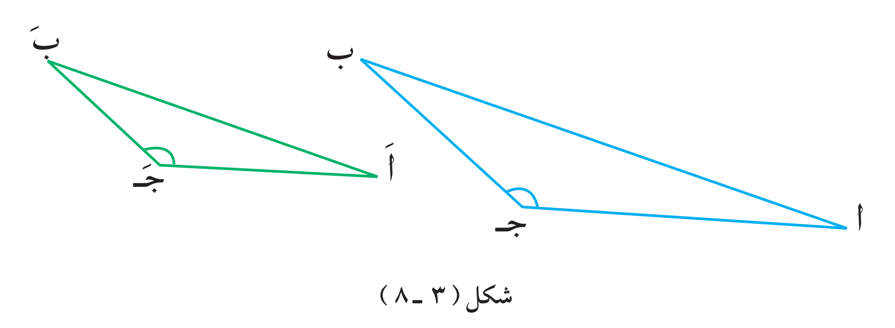
شكل (٣ ـ ٧)

نتيجة (٣ ـ ٢)

يتشابه مثلثان قائمان إذا تساوت زاوية حادة من أحدهما مع زاوية حادة من الآخر.

حقيقة (٣ ـ ٢)

يتشابه مثلثان إذا تساوت زاوية أحدهما مع زاوية من الآخر، وتناسب ضلعا أحد هاتين الزاويتين مع ضلعي الزاوية الأخرى، كما في الشكل (٣ ـ ٨).



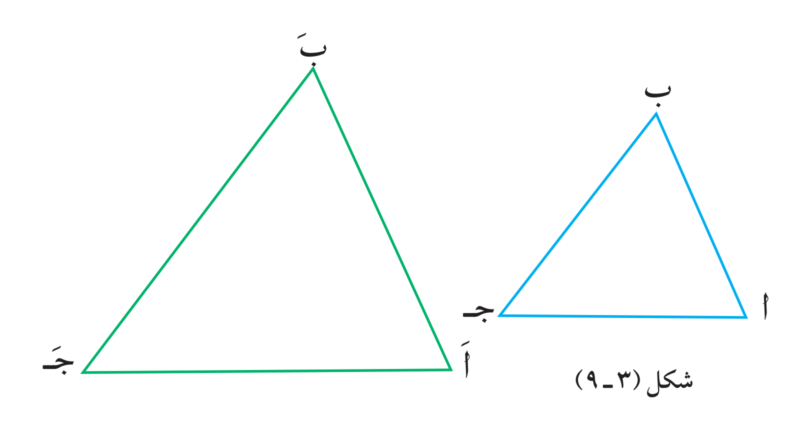
شكل (٣ ـ ٨)

نتيجة (٣ ـ ٣)

يتشابه مثلثان قائمان إذا تناسب ضلعا الزاوية القائمة من أحدهما مع ضلعي الزاوية القائمة من الآخر. لماذا ؟

حقيقة (٣ ـ ٣)

يتشابه مثلثان إذا تناسبت أضلاعهما، انظر شكل (٣ ـ ٩).



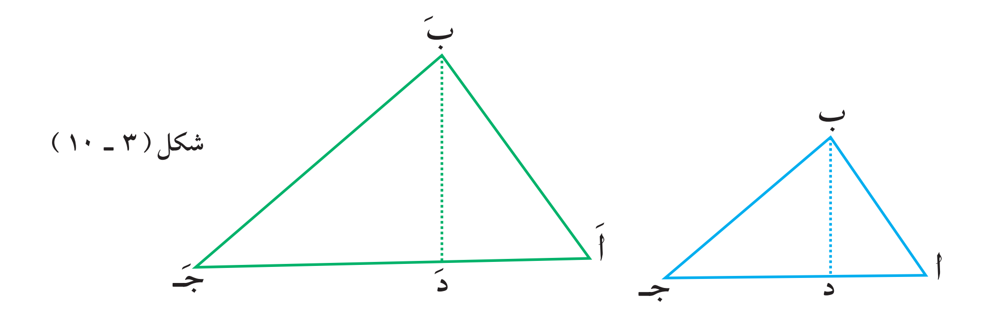
شكل (٣ ـ ٩)

نظرية (٣ ـ ٢)

إذا تشابه مثلثان فإن نسبة ارتفاعين متناظرين فيهما تساوي نسبة التشابه.

المفروض

△أ ب جـ يشابه △أَ بَ جَ [ب د] ، [بَ دَ] ارتفاعان متناظران، كما في الشكل (٣ ـ ١٠).



شكل (٣ ـ ١٠)

المطلوب إثباته : $\frac{|ب د|}{|بَ دَ|} = \frac{|أ ب|}{|أَ بَ|}$.

البرهــــان

المثلثان أ ب د ، أَ بَ دَ فيهما :

$\hat{أ} = \hat{أَ}$ زاويتان متناظرتان في المثلثين المتشابهين المفروضين

$\hat{د} = \hat{دَ}$ كل منهما قائمة

لذا ، استناداً للنتيجة (٣ ـ ٢)، $\triangle$ أ ب د يشابه $\triangle$ أَ بَ دَ ومن ذلك نحصل على :

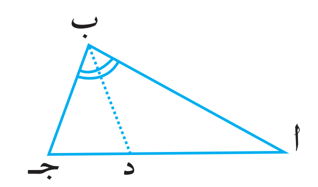
$\frac{|ب د|}{|بَ دَ|} = \frac{|أ ب|}{|أَ بَ|}$.

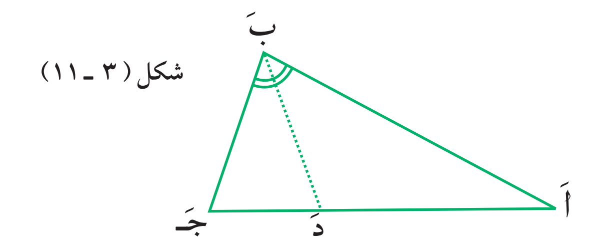
نظرية (٣ ـ ٣)

إذا تشابه مثلثان فإن نسبة طولي منصفي زاويتين داخليتين متناظرتين فيهما تساوي نسبة التشابه .

المفروض

$\triangle$ أ ب جـ يشابه $\triangle$ أَ بَ جَـ ، [ب د] ، [بَ دَ] منصفان داخليان للزاويتين المتناظرتين $\hat{ب}$ ، $\hat{بَ}$ على التوالي ، كما في الشكل (٣ ـ ١١).





شكل (٣ ـ ١١)

المطلوب إثباته : $\frac{|ب د|}{|بَ دَ|} = \frac{|أ ب|}{|أَ بَ|}$.

البرهـــــان

$\hat{أ} = \hat{أَ}$ ، $\widehat{أ ب جـ} = \widehat{أَ بَ جَـ}$ لتشابه المثلثين المفروضين أ ب جـ ، أَ بَ جَـ ، وبما أن [ب د] ، [بَ دَ] منصفان للزاويتين أ ب جـ ، أَ بَ جَـ على التوالي ، فإن :

$\widehat{أ ب د} = \widehat{أَ بَ دَ}$

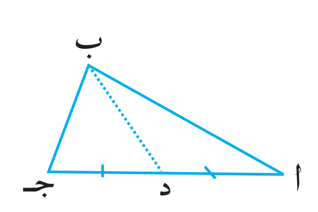
واستناداً للنتيجة (٣ ـ ١) فإن $\triangle$ أ ب د يشابه $\triangle$ أَ بَ دَ لتساوي زاويتين فيهما، وبالتالي نحصل على :

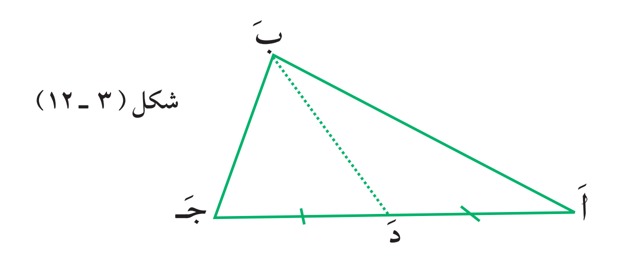
$$\frac{|ب د|}{|بَ دَ|} = \frac{|أ ب|}{|أَ بَ|} .$$

> **نظرية (٣ ـ ٤)**
> إذا تشابه مثلثان فـإن نسبة طولي قطعتي مستقيم متوسطتين متناظرتين فيهما تـساوي نسبة التشابه.

المفروض

$\triangle$ أ ب جـ يشابه $\triangle$ أَ بَ جَـ ، [ب د] ، [بَ دَ] مستقيمان متوسطان فيهما على التوالي، كما في الشكل (٣ ـ ١٢).





شكل (٣ ـ ١٢)

المطلوب إثباته : $\frac{|ب د|}{|بَ دَ|} = \frac{|ا ب|}{|اَ بَ|}$.

البرهـــان

من تشابه المثلثين ا ب جـ ، اَ بَ جَـ نجد أن $\hat{ا} = \hat{اَ}$ ، وأن

$$\frac{|ا ب|}{|اَ بَ|} = \frac{|ا جـ|}{|اَ جَـ|}$$

ولكن

$$\frac{|ا جـ|}{|اَ جَـ|} = \frac{\frac{1}{2}|ا جـ|}{\frac{1}{2}|اَ جَـ|} = \frac{|ا د|}{|اَ دَ|}$$ حسب تعريف المستقيم المتوسط

لذا $\frac{|ا ب|}{|اَ بَ|} = \frac{|ا د|}{|اَ دَ|}$

إذن

$\triangle$ ا ب جـ يشابه $\triangle$ اَ بَ جَـ لتساوي الزاوية ا مع الزاوية اَ وتناسب ضلعي $\hat{ا}$ مع ضلعي $\hat{اَ}$ (حقيقة « ٣ ـ ٢ ») في المثلثين المذكورين ، من ذلك نحصل على

$$\frac{|ب د|}{|بَ دَ|} = \frac{|ا ب|}{|اَ بَ|}$$

العلاقة بين مساحتي مضلعين متشابهين

نظرية (٣ ـ ٥)

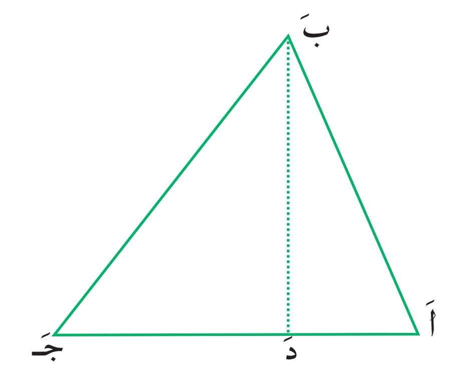
إذا تشابه مثلثان فإن نسبة مساحتيهما تساوي مربع نسبة التشابه.

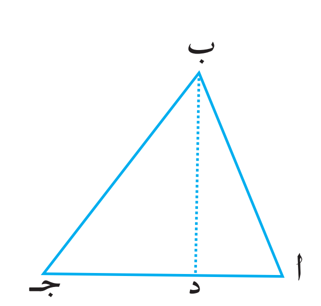
المفروض

Δ ا ب جـ يشابه Δ اَ بَ جَـ ، ح = مساحة Δ ا ب جـ ، حَ = مساحة Δ اَ بَ جَـ ،

$\frac{|ا\,ب|}{|اَ\,بَ|}$ = ث = نسبة التشابه ،

كما في الشكل (٣ـ١٣)





شكل (٣ـ١٣)

المطلوب إثباته : $\frac{ح}{حَ}$ = ث^{٢}

العمل : نرسم الارتفاعين [ب د] ، [بَ دَ]

البرهــــان

بما أن ح = $\frac{١}{٢}$ |ا جـ| x |ب د| ، حَ = $\frac{١}{٢}$ |اَ جَـ| x |بَ دَ|

إذن

$\frac{ح}{حَ}$ = $\frac{\frac{١}{٢}\,|ا\,جـ| \times |ب\,د|}{\frac{١}{٢}\,|اَ\,جَـ| \times |بَ\,دَ|}$

= $\frac{|ا\,جـ|}{|اَ\,جَـ|} \times \frac{|ب\,د|}{|بَ\,دَ|}$

ولكن

$\frac{|أ\ جـ|}{|أَ\ جَ|} = ث$ لتشابه المثلثين أ ب جـ ، أَ بَ جَ فرضاً (راجع التعريف «٣ـ٣»)

كذلك

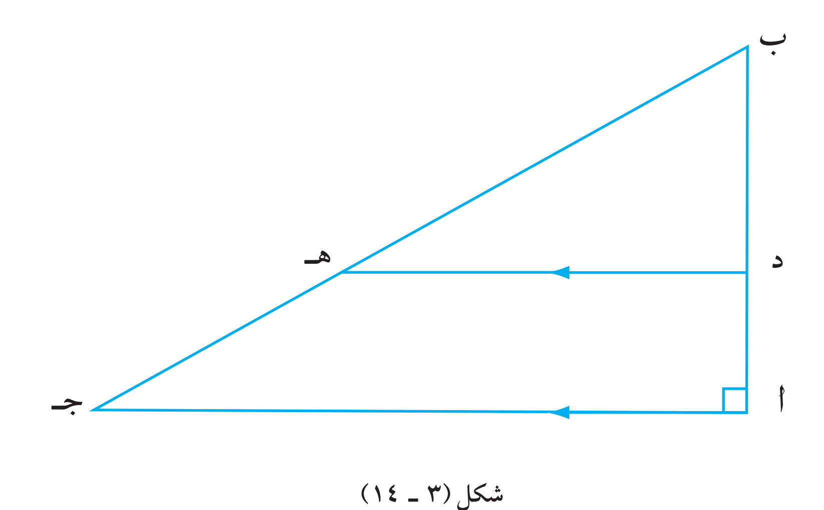
$\frac{|ب\ د|}{|بَ\ دَ|} = ث$ لأن نسبة الارتفاعين المتناظرين تساوي نسبة التشابه (نظرية «٣ ـ ٢»)

لذا فإن

$\frac{حـِ}{ح} = ث \times ث = ث^{٢}$.

مثال (٣ ـ ٢)

△ أ ب جـ قائم الزاوية في أ ، بحيث |أ ب| = ٦ سم ، |أ جـ| = ٩سم ، النقطة د على [أ ب] بحيث |أ د| = ٢سم ، رسمنا [د هـ] // [أ جـ] ليلاقي [ب جـ] في هـ. احسب مساحة المضلع أ د هـ جـ، كما في الشكل (٣ ـ ١٤).



شكل (٣ ـ ١٤)

الحـــل :

لتكن ح = مساحة $\triangle$ اب جـ ، حَ = مساحة $\triangle$ د ب هـ

بما أن [د هـ] // [ا جـ] فإن $\triangle$ د ب هـ يشابه $\triangle$ ا ب جـ

إذن $\frac{حَ}{ح} = \left(\frac{|ب د|}{|ب ا|}\right)^٢ = \frac{|ب د|^٢}{|ب ا|^٢}$ (نظرية «٣ ـ ٥»)

ولكن $|ب د| = |ب ا| - |د ا| = ٦ - ٢ = ٤$ سم

كذلك ح $= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٩ = ٢٧$ سم^٢

لذا فإن

$\frac{حَ}{٢٧} = \frac{٤^٢}{٦^٢} = \frac{١٦}{٣٦} = \frac{٤}{٩}$ ، أي أن

حَ $= ٢٧ \times \frac{٤}{٩} = ١٢$ سم^٢

فتكون مساحة المضلع ا د هـ جـ = ح − حَ = ٢٧ − ١٢ = ١٥ سم^٢

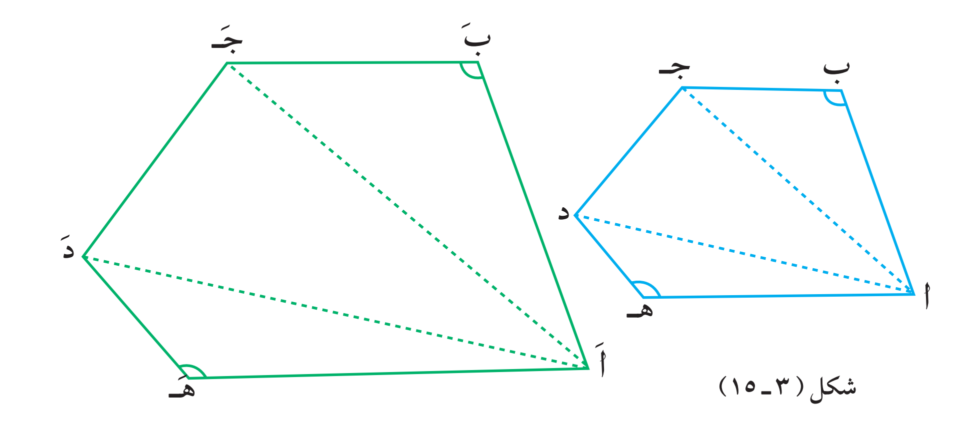
نظرية (٣ ـ ٦)

إذا تشابه مضلعان فإنه يمكن تقسيم كل منهما إلى مثلثات تتشابه مع نظائرها في المضلع الآخر .

سنبرهن هذه النظرية في حالة مخمسين متشابهين . ويمكن بالطريقة نفسها أن تبرهن النظرية في حالة أي مضلعين متشابهين.

المفروض

المضلع ا ب جـ د هـ يشابه المضلع اَ بَ جَـ دَ هَـ كما في الشكل (٣ ـ ١٥)



شكل (٣ـ١٥)

المطلوب إثباته : أولاً $\triangle$ ا ب جـ يشابه $\triangle$ اَ بَ جَـ

ثانياً $\triangle$ ا جـ د يشابه $\triangle$ اَ جَـ دَ

ثالثاً $\triangle$ ا د هـ يشابه $\triangle$ اَ دَ هَـ

البرهــــان

من تشابه المضلعين المفروضين نجد أن $\hat{\text{ب}}$ = $\hat{\text{بَ}}$ و أن

$$\frac{|\text{ا ب}|}{|\text{اَ بَ}|} = \frac{|\text{ب جـ}|}{|\text{بَ جَـ}|}$$

إذن

$\triangle$ ا ب جـ يشابه $\triangle$ اَ بَ جَـ (راجع الحقيقة «٣ـ٢»)

وهو المطلوب إثباته أولاً ، من ذلك نحصل على :

$$\frac{|\text{ا جـ}|}{|\text{اَ جَـ}|} = \frac{|\text{ا ب}|}{|\text{اَ بَ}|} \qquad (١)$$

كذلك بما أن $\hat{\text{هـ}}$ = $\hat{\text{هَـ}}$ ، $\frac{|\text{ا هـ}|}{|\text{اَ هَـ}|} = \frac{|\text{هـ د}|}{|\text{هَـ دَ}|}$

إذن

$\triangle$ أ د هـ يشابه $\triangle$ أَ دَ هَـ (راجع الحقيقة «٣ ـ ٢»)

وهو المطلوب إثباته ثالثاً ،

بالتالي نحصل على

$$\frac{|\text{أ د}|}{|\text{أَ دَ}|} = \frac{|\text{أ هـ}|}{|\text{أَ هَـ}|} \quad (٢)$$

ولكن

$$\frac{|\text{أ ب}|}{|\text{أَ بَ}|} = \frac{|\text{أ هـ}|}{|\text{أَ هَـ}|} = \frac{|\text{جـ د}|}{|\text{جَـ دَ}|} \quad \text{(٣) (لتشابه المضلعين)}$$

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن

$$\frac{|\text{أ جـ}|}{|\text{أَ جَـ}|} = \frac{|\text{أ د}|}{|\text{أَ دَ}|} = \frac{|\text{جـ د}|}{|\text{جَـ دَ}|}$$

ومن ذلك نستنتج أن

$\triangle$ أ جـ د يشابه $\triangle$ أَ جَـ دَ لتناسب أضلاعهما

وهو المطلوب إثباته ثانياً.

تدريب (٣ ـ ٢)

إذا كانت $ن$ = عدد أضلاع مضلع ما، فأقنع نفسك بأن عدد المثلثات الداخلة في تقسيمه = $ن - ٢$.

نظرية (٣ ـ ٧)

إذا تشابه مضلعان فإن نسبة مساحتيهما تساوي مربع نسبة التشابه .

البرهـــــان : (غير مطلوب)

المفروض

المضلع أ ب جـ د هـ يشابه المضلع أَ بَ جَـ دَ هَـ ، كما في الشكل (٣ ـ ١٥)، ومساحتيهما ح ،حَ على التوالي ، ونسبة التشابه = ث .

المطلوب إثباته : $\frac{ح}{حَ}$ = ث^{٢}.

البرهــــان

لنفرض أن ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ح$_{٣}$ ترمز لمساحات المثلث أ ب جـ ، أ جـ د ، أ د هـ ، على التوالي ، وبالمقابل حَ$_{١}$ ، حَ$_{٢}$ ، حَ$_{٣}$ ترمز لمساحات المثلثات المناظرة.

لقد رأينا أن نسبة مساحتي مثلثين متشابهين تساوي مربع نسبة التشابه (نظرية «٣ ـ ٥») وعليه يكون :

△ أ ب جـ يشابه △ أَ بَ جَـ ⟸ $\frac{ح_{١}}{حَ_{١}}$ = ث^{٢} (١)

△ أ جـ د يشابه △ أَ جَـ دَ ⟸ $\frac{ح_{٢}}{حَ_{٢}}$ = ث^{٢} (٢)

△ أ د هـ يشابه △ أَ دَ هَـ ⟸ $\frac{ح_{٣}}{حَ_{٣}}$ = ث^{٢} (٣)

من (١) ، (٢) ، (٣) ينتج أن

$\frac{ح_{١}}{حَ_{١}}$ = $\frac{ح_{٢}}{حَ_{٢}}$ = $\frac{ح_{٣}}{حَ_{٣}}$ = ث^{٢} ⟸ $\frac{ح_{١} + ح_{٢} + ح_{٣}}{حَ_{١} + حَ_{٢} + حَ_{٣}}$ = ث^{٢} ، لماذا؟

لكن ح = ح$_{١}$ + ح$_{٢}$ + ح$_{٣}$ ، كذلك حَ = حَ$_{١}$ + حَ$_{٢}$ + حَ$_{٣}$

إذن $\frac{ح}{حَ}$ = ث^{٢}.

مثال (٣ ـ ٣)

إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين ٣ سم ، ٥ سم وكانت مساحة المضلع الأكبر تساوي ١٠٠ سم^{٢} ، فأوجد مساحة المضلع الأصغر.

الحـــلّ :

لنفرض أن ح ترمز لمساحة المضلع الأصغر ، حَ لمساحة المضلع الأكبر

إذن

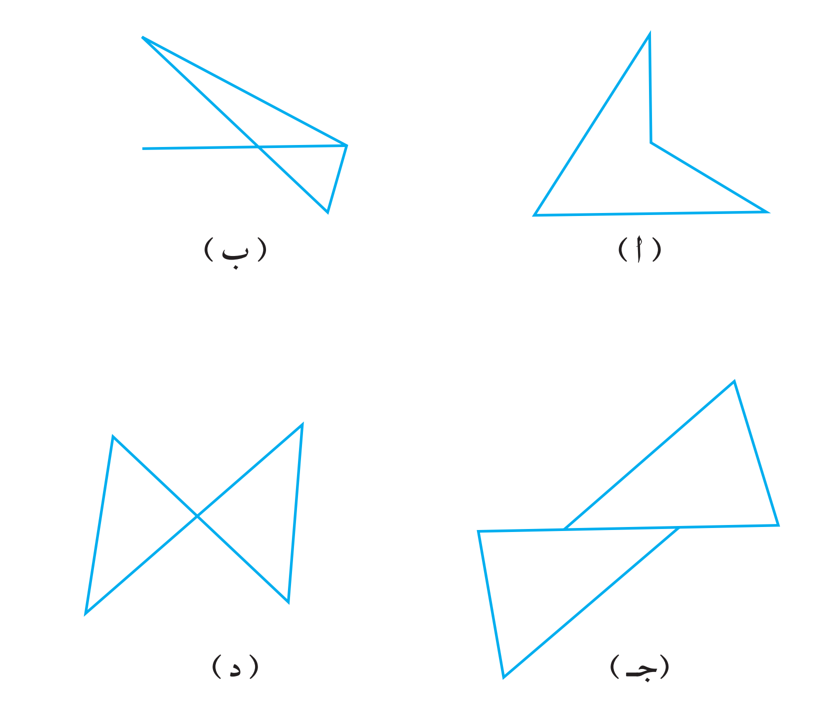
$$\frac{ح}{حَ} = \left(\frac{٣}{٥}\right)^{٢}$$ استناداً للنظرية (٣ ـ ٧)

أي أن

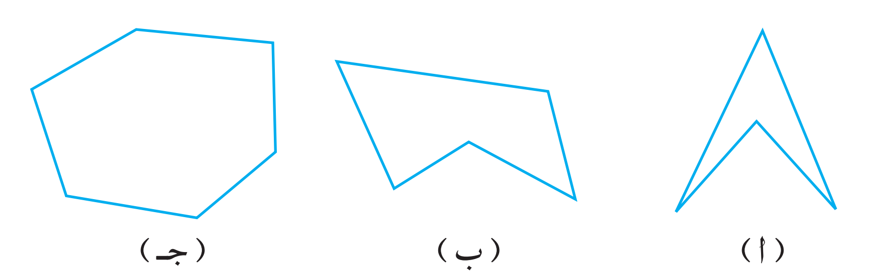
$$\frac{ح}{١٠٠} = \frac{٩}{٢٥} \Leftarrow ح = \frac{١٠٠ \times ٩}{٢٥} = ٣٦ \text{ سم}^{٢}$$

تمارين (٣ ـ ١)

١ ـ هل الأشكال الآتية مضلعات مع ذكر السبب ؟



٢ ـ بيِّن أي المضلعات الآتية محدباً وأيها مقعراً .



٣ ـ ارسم شكلاً لمضلع محدب وآخر مقعر لكل من الأنواع الآتية :

(أ) شكلاً خماسياً. (ب) شكلاً سداسياً. (جـ) شكلاً ثمانياً.

٤ ـ اختر أحد رؤوس كل مضلع فيما يأتي وارسم كل أقطار هذا المضلع المنطلقة من هذا الرأس، وما هو عددها؟

(أ) مضلع ذو اثني عشر ضلعاً . (ب) مضلع سباعي. (جـ) مضلع ذو تسعة أضلاع.

(د) ما هو عدد الأقطار المنطلقة من أحد رؤوس مضلع ذي ن ضلعاً ؟

٥ ـ أ ب جـ د هـ مضلع خماسي ارسم المثلثات الداخلة في تقسيم هذا المضلع.

٦ ـ اذكر عدد المثلثات الداخلة في تقسيم كل من المضلعات التالية :

(أ) المضلع السباعي. (ب) المضلع الثماني. (جـ) مضلع ذي ستة عشر ضلعاً

(د) المضلع النوني.

٧ ـ أوجد عدد أضلاع مضلع مجموع قياس زواياه الداخلية :

(أ) ١٦٢٠° . (ب) ١٨٠٠° . (جـ) ١٠٨٠° . (د) ١٩٨٠° . (هـ) ٢٣٤٠° .

٨ ـ مستطيلان متشابهان بعدا أصغرهما ٤ سم ، ٦ سم.

أوجد بعديْ المستطيل الأكبر إذا علمت أن نسبة التشابه هي $\frac{٢}{٥}$.

٩ ـ مضلعان منتظمان متشابهان ذوا تسعة أضلاع طول ضلع الأول يساوي ٥ سم وطول ضلع الثاني يساوي ٦ سم، أوجد محيط كل منهما ونسبة التشابه.

١٠ ـ مضلعان متشابهان فيهما ضلعان متناظران طولاهما ١٢ سم ، ١٥ سم على الترتيب، فإذا كان محيط المضلع الأصغر ٣٠ سم، فأوجد محيط المضلع الأكبر.

١١ ـ المضلعان أ ب جـ د هـ، أَ بَ جَـ دَ هَـ متشابهان فيهما | أ ب| = ٣ سم ،

|ب جـ| = ٥ سم ، |جـ د| = ٤ سم ، | د هـ| = ٦ سم،

|هـ أ| = ٨ سم

ومحيط المضلع أَ بَ جَـ دَ هَـ = ٥٢ سم أوجد أطوال أضلاعه

١٢ ـ مضلعان متشابهان النسبة بين مساحتيهما تساوي $\frac{١٦}{٢٥}$ فإذا كان أحد أضلاع المضلع الأصغر يساوي ٤ سم فأوجد طول الضلع المناظر له في الأكبر.

١٣ ـ مثلثان متشابهان مساحتاهما ٢٥ سم٢ ، ٤٩ سم٢ على الترتيب فإذا كان طول ارتفاعٍ في الأول ٤ سم فأوجد الارتفاع المناظر له في المثلث الآخر.

١٤ ـ المضلعان ا ب جـ د هـ ، اً بً حً دً يشابهان المضلع ا َب َجـَ دَ أثبت أن المضلعين ا ب جـ د ، اً بً حً دً متشابهان.

١٥ ـ ا ب جـ مثلث، نُصِّف الضلعان [ا ب] ، [ا جـ] في النقطتين د ، هـ على الترتيب، أثبت أن المثلث ا د هـ يشابه المثلث ا ب جـ . كم تساوي مساحة المثلث ا د هـ من مساحة المثلث ا ب جـ؟

١٦ ـ إذا كان المضلعان ا ب جـ د ، اَ بَ جَـ دَ متشابهين ، وكانت النقطتان، هـ ، هَـ منتصفي [ب د] ، [بَ دَ] على التوالي ، فأثبت أن المثلثين ا ب هـ ، اَ بَ هَـ متشابهان.

٣ ـ ٢ المضـلعـات المنتظمـة

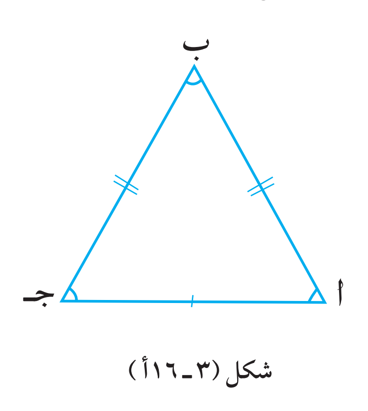
تعريف (٣ ـ ٤)

المضلع المنتظم هو مضلع أضلاعه متطابقة وزواياه متطابقة.

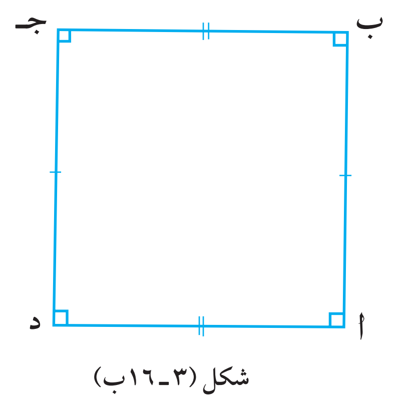
مثال (٣ ـ ٤)

(أ) المثلث المتطابق الأضلاع هو مضلع منتظم حيث أن أضلاعه متطابقة وزواياه متساوية قياس كل منهما يساوي ٦٠ْ ، انظر الشكل (٣ ـ ١٦أ).

(ب) المربع مضلع منتظم لأن أضلاعه متطابقة وزواياه متساوية قياس كل منها يساوي ٩٠ْ ، انظر شكل (٣ ـ ١٦ب).

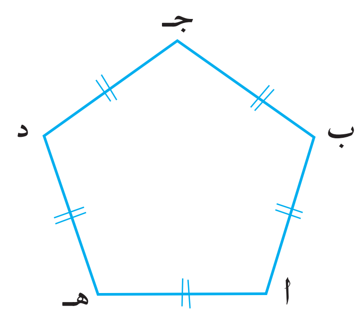


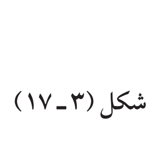
شكل (٣ ـ ١٦أ)



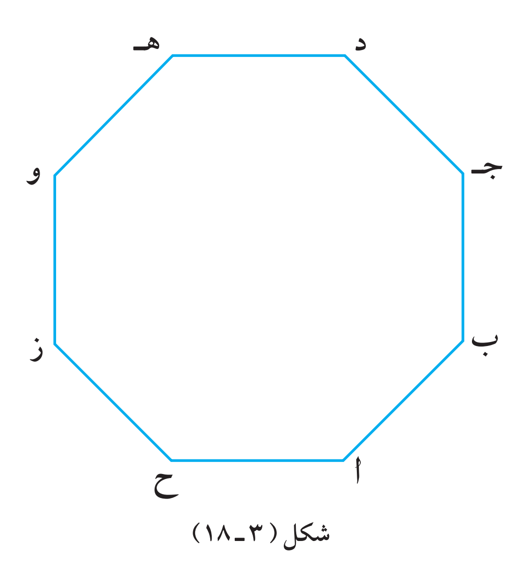
شكل (٣ ـ ١٦ب)

(جـ) المخمس المنتظم هو مضلع . أضلاعه الخمسة جميعها متطابقة، وزواياه متساوية، كما في شكل (٣ ـ ١٧).




شكل (٣ ـ ١٧)

(د) المثمن المنتظم هو مضلع. أضلاعه الثمانية متطابقة وزواياه متساوية ، كما في الشكل (٣ـ١٨).



شكل (٣ـ١٨)

ملاحظة (٣ـ٣)

(أ) من المعلوم أنه إذا كانت ں هي عـدد أضلاع مضلع ما فـإن مجمـوع قياس زواياه = (ں −٢) x ١٨٠ْ (راجع التدريب «٣ـ٢»)، ونتيجة لتساوي الزوايا في المضلع المنتظم فإننا نحصل على :

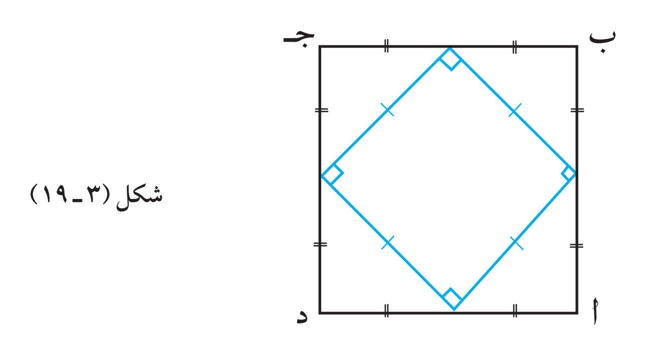
$$\text{قياس الزاوية في مضلع منتظم عدد أضلاعه ں} = \frac{(\text{ں} - ٢) \times ١٨٠^\circ}{\text{ں}}$$

(ب) يتشابه مضلعان منتظمان إذا تساوى عدد أضلاعهما.

تدريب (٣ـ٣)

١ ـ احسب قياس زاوية المخمس المنتظم والمثمن المنتظم.

٢ ـ المربع أ ب جـ د طول ضلعه = $\sqrt{٢}$ سم ، نصّف كلاً من أضلاعه ثم صل نقاط التنصيف ، كما في الشكل (٣ـ١٩). برهن أن الشكل الحاصل مربَّع وأوجد طول ضلعه.



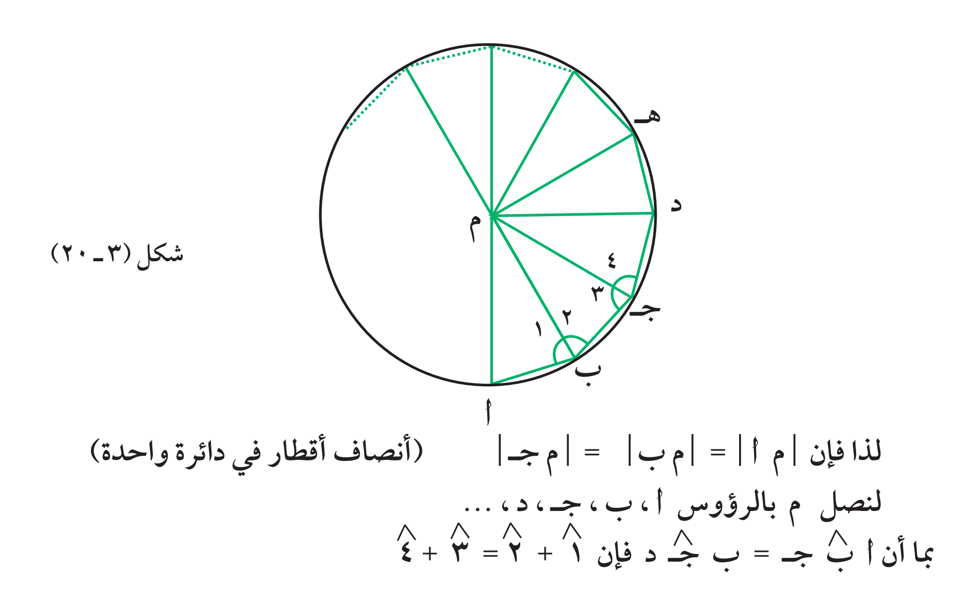
شكل (٣ـ١٩)

إمكانية رسم دائرة خارجية وأخرى داخلية لمضلع منتظم معلوم

تعريف (٣ـ٥)

نسمي الدائرة التي تمر برؤوس مضلع منتظم معطى ، الدائرة الخارجية لهذا المضلع بينما نسمي الدائرة التي تمس أضلاعه (من الداخل)، الدائرة الداخلية.

ليكن أ ب جـ د هـ ... مضلعاً منتظماً معطى ، كما في الشكل (٣ ـ ٢٠) ، ولنفرض أن م مركز الدائرة التي تمر بالنقاط، أ ، ب ، جـ حيث إنها ليست على استقامة واحدة.



شكل (٣ـ٢٠)

لذا فإن |م أ| = |م ب| = |م جـ| (أنصاف أقطار في دائرة واحدة)

لنصل م بالرؤوس أ ، ب ، جـ ، د ، ...

بما أن أ $\hat{ب}$ جـ = ب $\hat{جـ}$ د فإن $\hat{١}$ + $\hat{٢}$ = $\hat{٣}$ + $\hat{٤}$

ولكن $\hat{٢} = \hat{٣}$ (لأن |م ب| = |م جـ| في Δ م ب جـ)

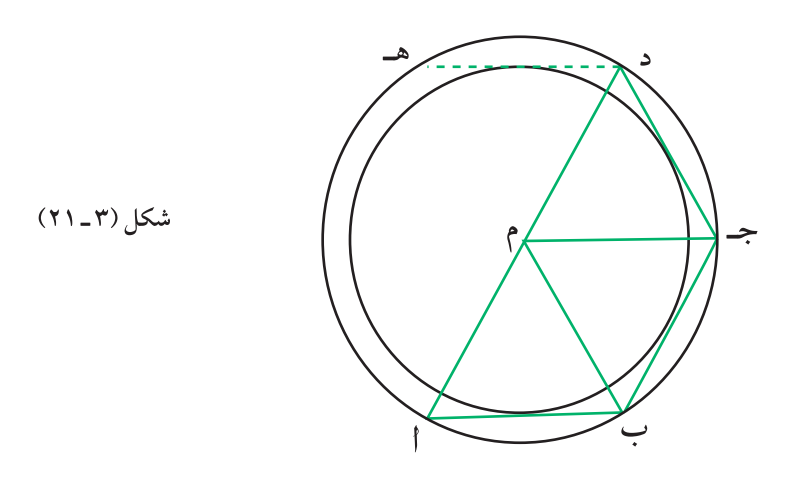
إذن $\hat{١} = \hat{٤}$

وبما أن |أ ب| = |جـ د| فإن المثلثين أ ب م ، جـ د م متطابقان (لتطابق ضلعين وتساوي زاوية محصورة بينهما من المثلث الأول مع نظائرها في الثاني) لهذا فإن |م أ| = |م د| ، أي أن الدائرة التي تمر بالنقاط أ ، ب ، جـ تمر أيضا بالنقطة د .

بهذه الطريقة يمكن إثبات أن هذه الدائرة تمر ببقية رؤوس المضلع المعطى.

من النقاش السابق نحصل على الاستنتاج التالي :
إذا أُعطينا مضلعاً منتظماً فإنه بالإمكان رسم دائرة خارجية له.

من جهة أخرى ، إذا كانت م مركزاً للدائرة الخارجية لمضلع منتظم معطى ، كما في الشكل (٣ ـ ٢١) فإن



شكل (٣ ـ ٢١)

|م أ| = |م ب| = |م جـ| = |م د| = ... (أنصاف أقطار في دائرة واحدة)
كذلك
|أ ب| = |ب جـ| = |جـ د| = ... (المضلع أ ب جـ د ... منتظم)

لذا نحصل على تطابق المثلثات م أ ب ، م ب جـ ، م جـ د ، ... التي قواعدها أضلاع المضلع المنتظم ورؤوسها عند النقطة م ، مما يقتضي تطابق ارتفاعاتها النازلة من م .

لذا فالدائرة التي مركزها م (مركز الدائرة الخارجية) وطول نصف قطرها يساوي طول العمود النازل من م على أحد أضلاع المضلع المنتظم المعطى تمس جميع أضلاعه من الداخل ، أي أنه : إذا أُعطينا مضلعاً منتظماً فإنه بالإمكان رسم دائرة داخلية له.

ملاحظة (٣ ـ ٤)

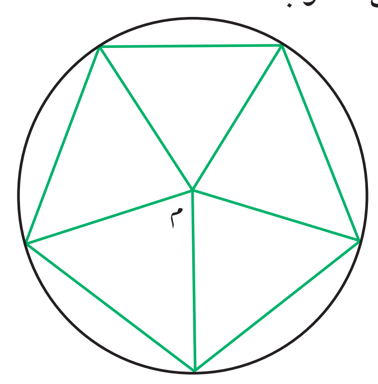
من النقاش السابق نستنتج أيضاً أن الدائرة الداخلية والدائرة الخارجية لمضلع ما منتظم لهما المركز نفسه ، نسميه مركز المضلع المنتظم.

رسم بعض المضلعات المنتظمة داخل دائرة معلومة

سبق لنا التعرف على بعض المضلعات المنتظمة من خلال المثال (٣ ـ ٤) ويجدر بنا الآن أن نشير إلى طريقة رسم بعض منها داخل دائرة معطاة.

١ ـ المخمس المنتظم

لنرسم الدائرة (م ، س) المعلومة ونقسم الزاوية المركزية إلى خمس زوايا متساوية قياس كل منها $\frac{٣٦٠}{٥}$ = ٧٢° ، كما في الشكل (٣ ـ ٢٢) ثم نصل نقاط تلاقي أنصاف الأقطار مع المحيط لنحصل بذلك على المطلوب.




شكل (٣ ـ ٢٢)

لاحظ أن الزوايا المركزية المتساوية يقابلها أقواس متطابقة، والأقواس المتطابقة يقابلها أوتار متطابقة.

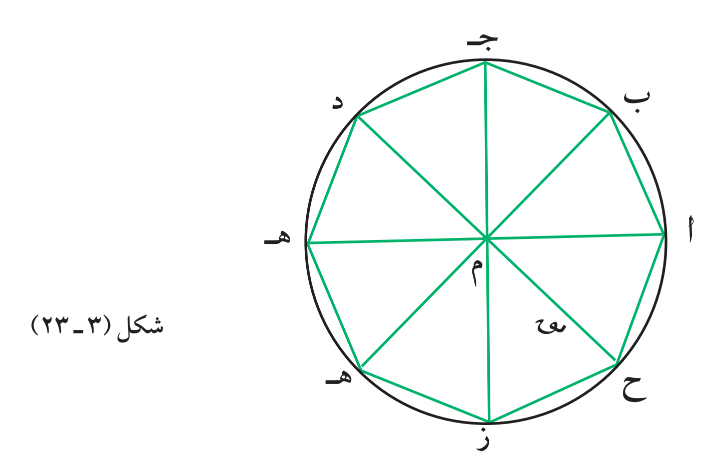
تدريب (٣ ـ ٤)

تأكد من تساوي جميع زوايا المخمس عن طريق تطابق المثلثات الخمسة التي رؤوسها م وقواعدها أضلاع المخمس.

٢ ـ المثمن المنتظم

لنرسم الدائرة (م ، نق) المعلومة ونرسم فيها قطرين متعامدين [أ هـ] ، [جـ ز] ثم ننصف الزوايا القائمة بالمنصفات [م ب] ، [م د] ، [م و] ، [م ح] كما في الشكل (٣ ـ ٢٣)

والآن نصل النقاط أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ز ، ح لنحصل بذلك على المثمن المنتظم المطلوب



شكل (٣ ـ ٢٣)

لاحظ أن الزاوية المركزية انقسمت إلى ثماني زوايا متساوية، قياس كل منها = $\frac{٣٦٠^\circ}{٨}$ = ٤٥°

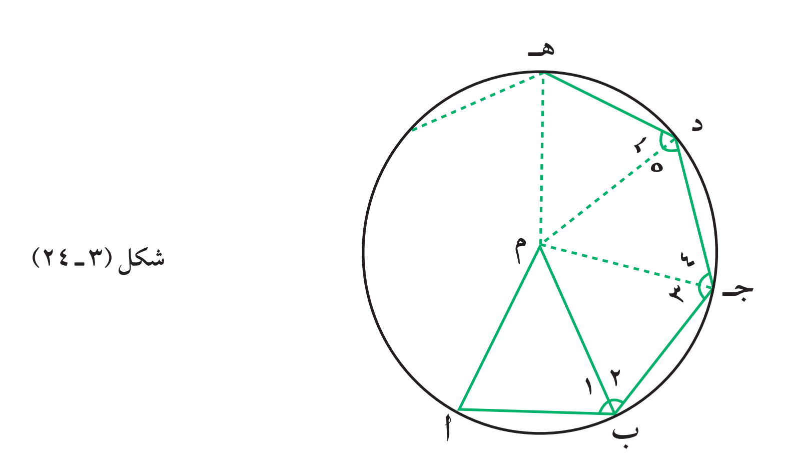
تدريب (٣ ـ ٥)

تأكد من أن المثمن في الشكل (٣ ـ ٢٣) منتظم، مستعيناً بنقاش مماثل للوارد في الفقرة السابقة والخاصة بالمخمس المنتظم.

والجدير بالذكر أنه يمكن استخدام الطريقة السابقة لرسم أي مضلع منتظم عدد أضلاعه ن

داخل الدائرة (م ، نق) المعلومة كالتالي :

لنرسم أي زاوية مركزية مثل $\hat{أمب}$ قياسها يساوي $\frac{360^\circ}{ن}$ ثم نركز الفرجار في ب وبفتحة قدرها |أ ب| نقسم الدائرة إلى أقواس متساوية ونصل بين هذه النقاط لنحصل على المضلع أ ب جـ د هـ ..، كما في الشكل (٣ ـ ٢٤).



شكل (٣ ـ ٢٤)

لاحظ أن تساوي الزوايا المركزية يؤدي إلى تطابق الأقواس المقابلة لها وبالتالي تطابق الأوتار أي أن

|أ ب| = |ب جـ| = |جـ د| = |د هـ| = ...

من جهة أخرى تطابق المثلثات (المتطابقة الضلعين) م أ ب ، م ب جـ ، م جـ د ، م د هـ ، ... يؤدي إلى أن

$\hat{١} = \hat{٢} = \hat{٣} = \hat{٤} = \hat{٥} = \hat{٦} = ...$

$\Leftarrow \hat{١} + \hat{٢} = \hat{٣} + \hat{٤} = \hat{٥} + \hat{٦} = ...$

أي أن أ $\hat{ب}$ جـ = ب $\hat{جـ}$ د = جـ $\hat{د}$ هـ = ...

لنحصل بذلك على المضلع أ ب جـ د هـ .. المنتظم المطلوب

تدريب (٣ ـ ٦)

ارسم مثلثاً منتظماً داخل دائرة وحاول، عن طريق تنصيف الأقواس الناتجة ، الحصول على مسدس منتظم . ماذا يحصل لو قمت بتنصيف أقواس المسدس ؟ وماذا تستنتج ؟

تدريب (٣ ـ ٧)

ارسم مضلعاً منتظماً ذا اثني عشر ضلعاً داخل دائرة نصف قطرها ٥ سم.

مساحة المضلع المنتظم

تعريف (٣ ـ ٦)

نسمي طول العمود النازل من مركز المضلع المنتظم على أحد أضلاعه ، عامد المضلع. كما في الشكل (٣ ـ ٢٥).

نظرية (٣ ـ ٨)

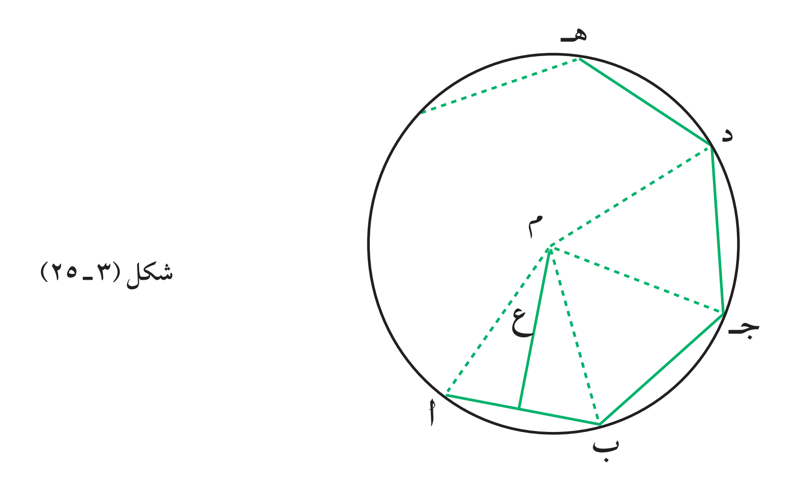
مساحة المضلع المنتظم تساوي نصف حاصل ضرب طول محيطه في عامده.

المفـروض

أ ب جـ د ... مضلع منتظم ، محيطه ح وعامده ع

المطلوب إثباته : مساحة المضلع المنتظم = $\frac{١}{٢}$ ح ع.

العمل : ليكن م مركز الدائرة الخارجية للمضلع المعطى ولنصل [م أ]، [م ب]، [م جـ] ، [م د] ، ...، كما في الشكل (٣ ـ ٢٥).



شكل (٣ـ٢٥)

البرهـــان

مساحة Δ م ا ب = $\frac{١}{٢}$ |ا ب| . ع ، كذلك

مساحة Δ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ |ب جـ| . ع ،

وبصيغة مكافئة نحصل على مساحة بقية المثلثات المتطابقة التي رأس كل منها م وقاعدته أحد أضلاع المضلع.

مساحة المضلع المنتظم = مجموع مساحات هذه المثلثات المتطابقة

= $\frac{١}{٢}$ |ا ب| . ع + $\frac{١}{٢}$|ب جـ| .ع + ...

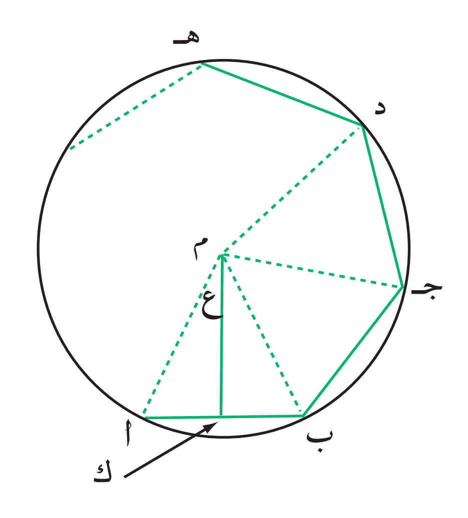
= $\frac{١}{٢}$ (|ا ب| + |ب جـ| + ...) ع

ولكن |ا ب| + |ب جـ| + ... = م

إذن مساحة المضلع المنتظم = $\frac{١}{٢}$ م ع.

ملاحظة (٣ ـ ٥)

إذا كان ا ب جـ د ... مضلعاً منتظماً عدد أضلاعه ن ، عامده ع ، (م ، نق) دائرته الخارجية ، كما في الشكل (٣ـ٢٦)،



شكل (٣ ـ ٢٦)

فإن أ $\hat{م}$ ب = $\frac{٣٦٠^\circ}{ن}$ ،

|م أ| = |م ب| = نق ⇐ ع ينصف القاعدة [أ ب] في ك وينصف زاوية الرأس أ م ب

في المثلث أ م ب ،

أي أن

$$أ\hat{م}ك = \frac{أ\hat{م}ب}{٢}$$

$$= \frac{٣٦٠^\circ}{٢ن}$$

$$= \frac{١٨٠^\circ}{ن}$$

طول الضلع والعامد لبعض المضلعات المنتظمة.

نذكِّرك فيما يلي بما سبق أن تعلمته في المرحلة المتوسطة عن بعض المضلعات المنتظمة.

(١) المربـع

في الشكل (٣ ـ ٢٧) مربع مرسوم داخل الدائرة.

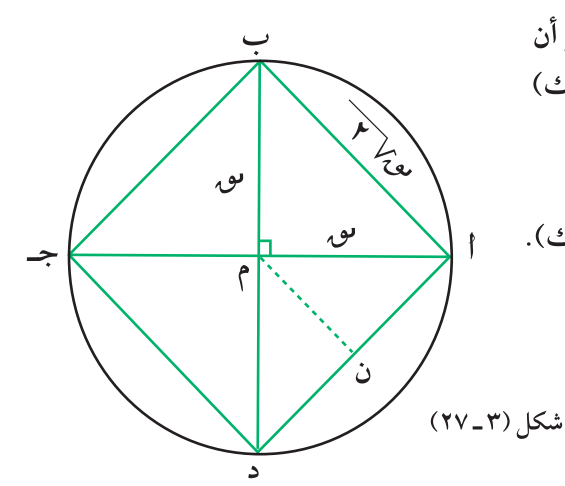
(م ، نق).

ما طول ضلع هذا المربع، لعلَّك تذكر أن

$|أ ب| = نق\sqrt{2}$ (تحقق من ذلك)

ما طول عامد المربع ؟ لعلَّك تذكر أن

$|م ن| = \frac{نق\sqrt{2}}{2}$ (تحقق من ذلك).



شكل (٣ ـ ٢٧)

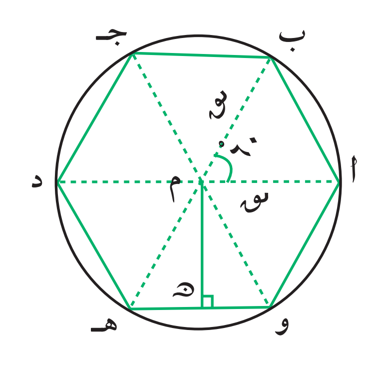
(٢) المسدس المنتظم

في الشكل (٣ ـ ٢٨) مسدس منتظم

مرسوم داخل الدائرة (م ، نق)

ما طول ضلع هذا المسدس؟

لعلك تتذكر أن |أ ب| = نق (تحقق من ذلك).



شكل (٣ ـ ٢٨)

استنتج طريقة لرسم هذا المسدس مستعيناً بالفرجار والمسطرة.

ارسم العامد [م ﻫ]. لعلَّك تتذكر أن $|م ﻫ| = \frac{نق\sqrt{3}}{2} = \frac{ل\sqrt{3}}{2}$

(تحقق من ذلك)

(٣) المثلث المتطابق الأضلاع المرسوم داخل دائرة.

ارسم مسدساً منتظما أ ب جـ د هـ وداخل الدائرة (م ، نق) كما في الشكل (٣ ـ ٢٩).

صل أضلاع المثلث أ جـ هـ

ماذا تقول عن هذا المثلث؟

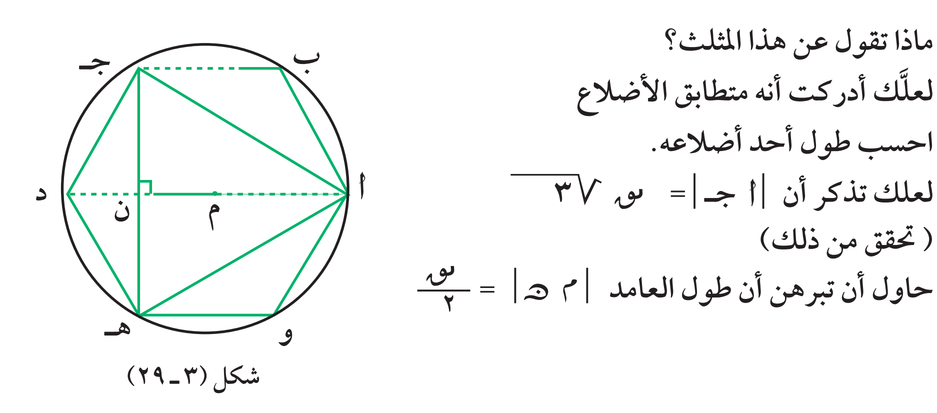
لعلَّك أدركت أنه متطابق الأضلاع

احسب طول أحد أضلاعه.

لعلك تذكر أن |أ جـ| = نق $\sqrt{3}$

(تحقق من ذلك)

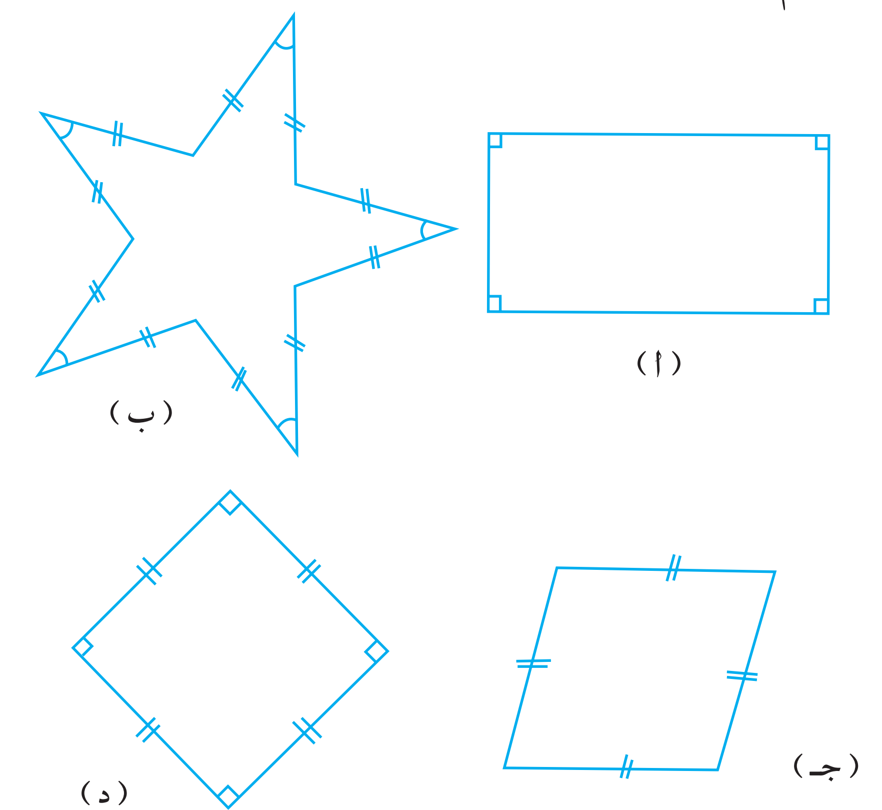
حاول أن تبرهن أن طول العامد |م ن| = $\frac{\text{نق}}{2}$



شكل (٣ ـ ٢٩)

تمـاريــن (٣ ـ ٢)

١ ـ أي الأشكال الآتية مضلعات منتظمة مع ذكر السبب عندما يكون الشكل مضلعاً غير منتظم؟



٢ ـ أوجد قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم له :

(أ) سبعة أضلاع (ب) عشرة أضلاع (جـ) ستة عشر ضلعاً (د) ن ضلعاً.

٣ ـ أوجد مجموع قياس الزوايا الداخلية للمضلعات المنتظمة الآتية :

(أ) المسدس (ب) المتسع (جـ) مضلع له أربعة عشر ضلعاً.

٤ ـ أوجد عدد أضلاع مضلع منتظم إذا علمت أن قياس إحدى زواياه الداخلية هي :

(أ) ١٠٨ْ (ب) ١٤٤ْ (جـ) ١٦٢ْ (د) ١٧٠ْ

٥ ـ ارسم الأشكال المنتظمة الآتية داخل دائرة (م ، ٥سم).

(أ) مسدساً (ب) متسعاً (جـ) شكلاً له اثنا عشر ضلعاً

٦ ـ أوجد مساحة المسدس المنتظم الذي طول ضلعه ٦سم.

٧ـ مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٥ سم . أوجد النسبة بين مساحتي الدائرتين الخارجية والداخلية للمثلث المذكور.

٨ ـ مربع طول ضلعه ٢ ل سم نُصّف كل ضلع من أضلاعه. بيِّن أن نقط التنصيف هي رؤوس مربع.

٩ ـ أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦ سم قُسم كلٌ من أضلاعه إلى ثلاثة أقسام متساوية. برهن أن نقط التقسيم هي رؤوس مسدس منتظم.

١٠ ـ إذا قسمنا محيط دائرة إلى خمسة أقسام متساوية، فأثبت أن الأوتار الواصلة بين نقط التقسيم المتتابعة تشكل مخمساً منتظماً.

١١ ـ برهن أنه إذا تشابه مضلعان منتظمان فإن نسبة نصفي قطري الدائرتين الخارجيتين تساوي نسبة التشابه.

١٢ ـ برهن أنه إذا تشابه مضلعان منتظمان فإن نسبة محيطيهما تساوي نسبة نصفي قطري الدائرتين الخارجيتين.

١٣ ـ برهن أنه يتطابق وتران في دائرة إذا وفقط إذا تساوى بعداهما عن مركز تلك الدائرة.

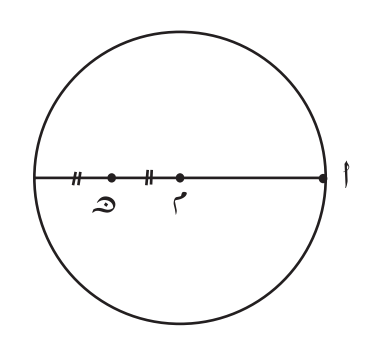
١٤ ـ ارسم دائرة (م ، نق) ثم ارسم بدقة المربع المرسوم داخلها.

وارسم العامد المتعلق بكل ضلع من أضلاع المربع ، ثم مدّد العوامد التي رسمتها لتلاقي الدائرة، صل كلاً من نقاط التلاقي برأسي المربع المجاورين لها.

أثبت أن المضلع الذي حصلت عليه مثمن منتظم وإذا كان نق = $\sqrt{7}$٢ سم فاحسب طول ضلع هذا المثمن.

١٥ ـ [أب] وتر في الدائرة (م ، نق) طوله يساوي طول ضلع المسدس المنتظم المرسوم داخل الدائرة. [ب جـ] وتر آخر طوله يساوي طول ضلع المثلث المتساوي الأضلاع المرسوم داخل الدائرة. أثبت أن الوتر [أ جـ] يمر بالمركز م.

١٦ ـ اكتشف طريقة لرسم المثلث المتساوي الأضلاع في الدائرة (م ، نق) بدون رسم المسدس، ولا قياس الزوايا معتمداً على الشكل المرسوم.



١٧ ـ أ ب جـ د رباعي دائري نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه نق ،

|أ ب| = |ب جـ| = نق $\sqrt{7}$٢، أ جـ^ د = ٦٠°

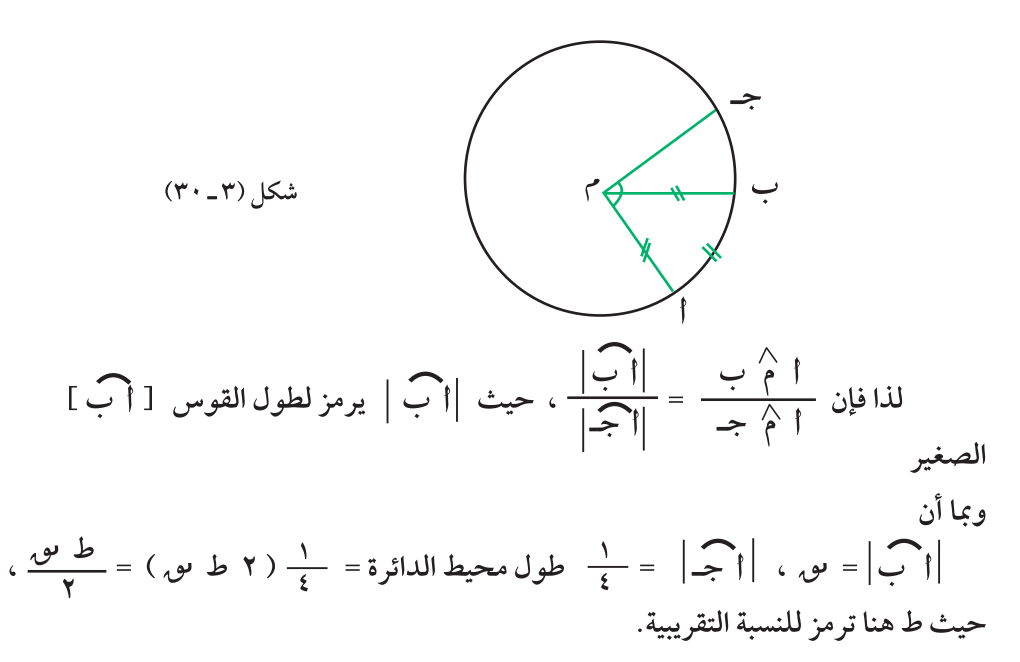
احسب كلاً من |أ د| ، |جـ د| ، ثم احسب مساحة الرباعي أ ب جـ د.

٣ ـ٣ قياس الزوايا ومساحة قطاع دائري

قياس الزوايا

من الطرائق المعلومة لدينا، لقياس الزوايا، طريقة التقدير (القياس) الستيني، ومن المفيد هنا أن نتعلم طريقة أخرى تعرف بالقياس الدائري.

لنفرض أن (م ، سه) دائرة بحيث أن $|\overset{\frown}{\text{أب}}|$ = سه ، وأن $\text{أ}\hat{\text{م}}\text{جـ}$ زاوية مركزية قائمة، كما في الشكل (٣ ـ ٣٠).



شكل (٣ ـ ٣٠)

لذا فإن $\dfrac{\text{أ}\hat{\text{م}}\text{ب}}{\text{أ}\hat{\text{م}}\text{جـ}} = \dfrac{|\overset{\frown}{\text{أب}}|}{|\overset{\frown}{\text{أجـ}}|}$ ، حيث $|\overset{\frown}{\text{أب}}|$ يرمز لطول القوس [$\overset{\frown}{\text{أب}}$] الصغير

وبما أن

$|\overset{\frown}{\text{أب}}|$ = سه ، $|\overset{\frown}{\text{أجـ}}| = \dfrac{١}{٤}$ طول محيط الدائرة $= \dfrac{١}{٤}$ (٢ ط سه) $= \dfrac{\text{ط سه}}{٢}$ ،

حيث ط هنا ترمز للنسبة التقريبية.

إذن $\dfrac{\text{أ}\hat{\text{م}}\text{ب}}{\text{أ}\hat{\text{م}}\text{جـ}} = \dfrac{\text{سه}}{\dfrac{\text{ط سه}}{٢}}$

$= \dfrac{٢}{\text{ط}}$

لذا

$$\text{أ}\hat{\text{م}}\text{ب} = \text{أ}\hat{\text{م}}\text{جـ} \times \dfrac{٢}{\text{ط}} = ٩٠^\circ \times \dfrac{٢}{\text{ط}} = \dfrac{١٨٠^\circ}{\text{ط}}.$$

وحيث إن كلاً من البسط والمقام مقدار ثابت ، نستنتج أن $\text{أ}\hat{\text{م}}\text{ب}$ = مقداراً ثابتاً، ولهذا يمكن اعتبارها وحدة لما يسمى بالقياس الدائري للزوايا، حيث تعرف الزاوية $\text{أ}\hat{\text{م}}\text{ب}$ بالزاوية النصف قطرية (أو الراديان)، ومن هنا نستخلص التعريف التالي :

تعريف (٣ ـ ٧)

الراديان هو قياس زاوية مركزية يكون طول القوس المقابل لها، والمحدود بضلعيها، مساوياً لطول نصف قطر دائرتها.

أي أن الراديان $\frac{١٨٠^\circ}{ط}$.

$= \frac{١٨٠^\circ}{٣,١٤٢} = ٤٥'' \; ١٧' \; ٥٧^\circ$ تقريباً

القياس الدائري لزاوية هو الذي وحدة القياس فيه الراديان.

العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية

الزاوية النصف قطرية الواحدة (الراديان) = $\frac{١٨٠^\circ}{ط}$ ، أي أن ط من الزوايا النصف قطرية $= ١٨٠^\circ$

فإذا كان قياس زاوية ما بالتقدير الستيني $س^\circ$ وبالقياس الدائري د راديان فإن

$$\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} = \frac{د}{ط}$$

أي أن $س = \frac{د}{ط} \times ١٨٠^\circ$ درجة

أو $د = \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} \times ط$ راديانـاً

مثال (٣ ـ ٥)

أوجد قياس زاوية المسدس المنتظم بالتقدير الدائري

الحــــلّ :

زاوية المسدس المنتظم (بالقياس الستيني) $= \frac{(٦ - ٢) \times ١٨٠^\circ}{٦} = ١٢٠^\circ$،

وذلك استناداً إلى فقرة (أ) من الملاحظة (٣ ـ ٣).

بما أن د = $\frac{س^\circ}{180^\circ}$ × ط

إذن

د = $\frac{120^\circ}{180^\circ}$ × ٣,١٤ = ٢,٠٩٤ رادياناً.

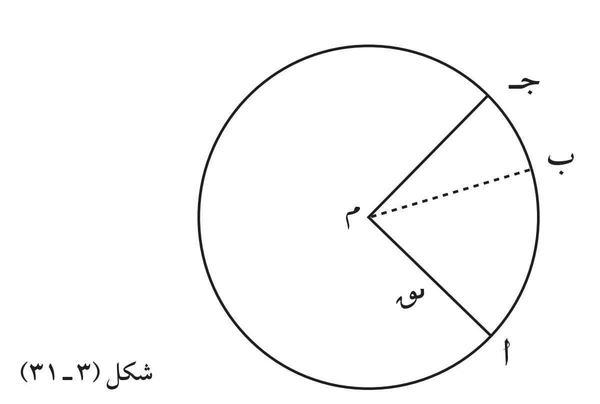
حساب طول قوس دائرة

نظرية (٣ ـ ٩)

إذا كانت (م ، نق) دا ئرة ، وكان ل طول قوس الدائرة المحصور بين ضلعي زاوية مركزية قياسها د رادياناً فإن ل = د نق .

المفروض

(م ، نق) دائرة ، أ $\hat{م}$ جـ زاوية مركزية قياسها = د رادياناً ، |$\overset{\frown}{أجـ}$| = ل ، كما في الشكل (٣ ـ ٣١)



شكل (٣ ـ ٣١)

المطلوب إثباته ل = د نق

العمل : نرسم الزاوية النصف قطرية أ $\hat{م}$ ب.

البرهـــان

$\frac{أ \hat{م} جـ}{أ \hat{م} ب} = \frac{|\overset{\frown}{أجـ}|}{|\overset{\frown}{أب}|}$ ، وذلك لتناسب الزوايا المركزية مع أطوال الأقواس المقابلة لها.

ولكن $|\overset{\frown}{أب}| = |أم| = نق$ ، $أ \hat{م} ب$ = رادياناً واحداً،

$أ \hat{م} جـ$ = د راديان ، $|\overset{\frown}{أجـ}| = ل$

لذا فإن $\frac{د}{١} = \frac{ل}{نق} \Leftarrow ل = د\ نق$

ملاحظة (٣ ـ ٦)

بما أن ل = د نق ، د = $\frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} \times$ ط راديان

لذا فإنه إذا عُلم قياس الزاوية المركزية بالتقدير الستيني ، فإن

$$ل = \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ} \times ط\ نق$$

مثال (٣ ـ ٦)

احسب طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٤ , ١ راديان في دائرة نصف قطرها ٥ سم.

الحـــلّ :

ل = د نق $\Leftarrow$ ل = ٤ , ١ × ٥ = ٧ سم

مثال (٣ ـ ٧)

أوجد بالتقدير الستيني والتقدير الدائري قياس زاوية مركزية تقابل قوساً طوله ٤ ط سم من محيط دائرة نصف قطرها ٦ سم.

الحـــل :

$د = \frac{ل}{نق}$ ⇐ قياس الزاوية بالتقدير الدائري

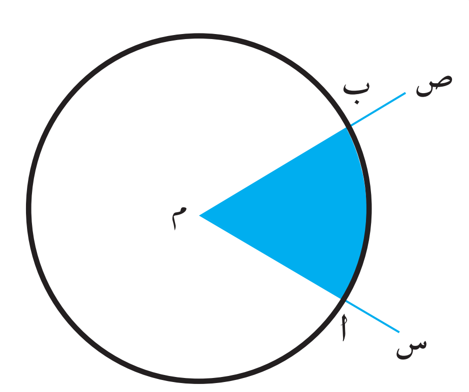
$د = \frac{٤ط}{٦} = \frac{٢}{٣}$ ط راديان.

$س^\circ = \frac{د}{ط} \times ١٨٠^\circ$ ⇐ قياس الزاوية بالتقدير الستيني

$= س = \frac{\frac{٢}{٣}ط}{ط} \times ١٨٠^\circ = ١٢٠^\circ$

مساحة قطاع دائري :

لنتذكر القطاع الزاوي المركزي ، بالنسبة لدائرة معلومة ، عبارة عن قطاع زاوي رأسه مركز تلك الدائرة، وأن القطاع الدائري هو تقاطع دائرة وداخلها مع قطاع زاوي مركزي، كما في الشكل (٣ ـ ٣٢).



شكل (٣ ـ ٣٢)

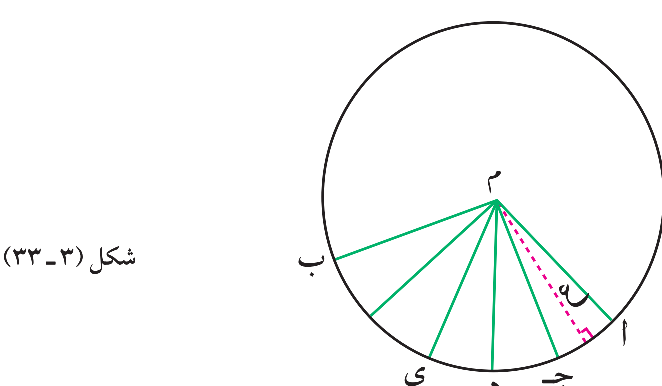
سوف نرمز لهذا القطاع بالرمز [م أ ، م ب] ($\wedge$).

نظرية (٣ ـ ١٠)

في الدائرة (م ، نق) ، مساحة القطاع الدائري الذي طول قوسه ل تساوي $\frac{١}{٢}$ ل نق

المفروض

(م ، نق) دائرة معلومة ، [م أ ، م ب] قطاع دائري طول قوسه ل، كما في الشكل (٣ ـ ٣٣)، ومساحته ع.



شكل (٣ ـ ٣٣)

المطلوب إثباته : $ع = \frac{١}{٢}$ ل نق

العمل : نقسم القوس الصغير [أب⌒] إلى ن من الأجزاء المتساوية في النقاط جـ ، هـ ، ي، . . . ، ونصل أنصاف الأقطار [م جـ] ، [م هـ] ، [م ي] . . . وكذلك نصل [أ جـ] ، [جـ هـ] ، [هـ ي] . . .

البرهان

|أجـ⌒| = |جـ هـ⌒| = |هـ ي⌒| = . . . ⟸ |أ جـ| = |جـ هـ| = |هـ ي| = . . .

⟸ المثلثات م أ جـ ، م جـ هـ ، م هـ ى ، . . . متطابقة، وذلك لتطابق الأضلاع المتناظرة فيها.

لكن مساحة △ م أ جـ = $\frac{١}{٢}$× ع ×|أ جـ| ، حيث ع طول العمود النازل من م.

عدد المثلثات = ن ⟸ مجموع مساحات المثلثات $\frac{١}{٢}$× ع × |أ جـ| × ن

لكن |أ جـ| × ن = |أ جـ| + |جـ هـ| + |هـ ي| + . . . = طول الخط المضلع أ جـ هـ ي . . . ب.

إذن

مجموع مساحات المثلثات = $\frac{١}{٢}$ × ع × طول الخط المضلع.

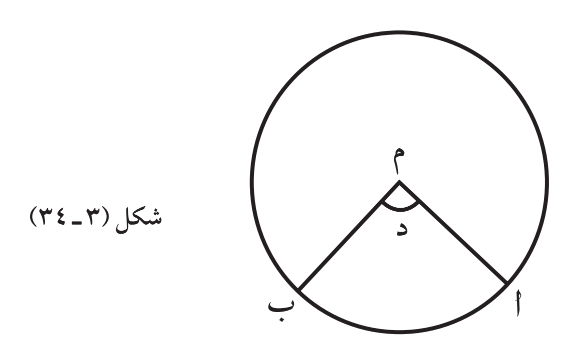
وبزيادة نقط تقسيم القوس [$\overset{\frown}{أ ب}$] تصغر الأوتار المتناظرة ومن ثم يزداد الخط المضلع قرباً من القوس وبالتالي فإن طول الخط المضلع يقترب من | $\overset{\frown}{أ ب}$ | = ل ، والارتفاع ع يقترب من نق في طوله، ومجموع مساحات المثلثات يقترب من مساحة القطاع [م أ ، $\hat{م}$ ب] ، لنحصل في النهاية على

ع = $\frac{١}{٢}$ ل نق

ملاحظة (٣ ـ ٧)

(أ) يمكننا حساب مساحة قطاع دائري في دائرة (م ، نق) معطاة ، بمعلومية زاويته المركزية، كما يلي :

إذا كان [م أ ، $\hat{م}$ ب] قطاعاً دائرياً ، شكل (٣ ـ ٣٤) حيث



شكل (٣ ـ ٣٤)

أ $\hat{م}$ ب = د راديان ، | $\overset{\frown}{أ ب}$ | = ل ، فإنه حسب النظرية (٣ ـ ٩) :

ل = د نق .

لكن مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق حسب النظرية (٣ ـ ١٠) :

لذا نجد أن

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ د × نق × نق

= $\frac{١}{٢}$ د نق^{٢}

(ب) إذا اعتبرنا الدائرة قطاعاً قياس زاويته المركزية ٢ ط راديان ، فإن مساحتها ، استناداً للفقرة (١) السابقة ، تعطى بالقانون :

مساحة الدائرة = $\frac{١}{٢}$ × ٢ ط $نق^٢$

= ط $نق^٢$

(جـ) كذلك نستطيع حساب مساحة قطاع دائري بمعلومية مساحة الدائرة المرسوم فيها وقياس زاويته المركزية ، كما يلي :

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\frac{١}{٢}\ د\ نق^٢}{ط\ نق^٢}$$

= $\frac{د}{٢\ ط}$ ، حيث د = قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائري.

⇐ مساحة القطاع الدائري = $\frac{د}{٢\ ط}$ × مساحة الدائرة المرسوم فيها.

أيضاً ، بما أن

د = ط × $\frac{س^\circ}{١٨٠}$

لذا فإن

مساحة القطاع = $\frac{ط × س^\circ}{١٨٠^\circ × ٢\ ط}$ × مساحة الدائرة.

أي أن

مساحة القطاع الدائري = $\frac{س^\circ}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة المرسوم فيها ، حيث $س^\circ$ = قياس الزاوية المركزية بالتقدير الستيني.

مثال (٣ ـ ٨)

أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٣ ـ ٣٥)، حيث [م أ ، م ب] قطاع دائري ، قياس زاويته المركزية = ٦٠° ونصف قطر دائرته ٦ سم. (اعتبر ط = ٣,١٤ ، $\sqrt{٣}$ = ١,٧٣).

م
٦ سم
٦٠°
أ
ب

شكل (٣ ـ ٣٥)

الحـــل :

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ د $نق^{٢}$

ولكن د = ط × $\frac{سْ}{١٨٠}$

لذا

مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ × ط × $\frac{سْ}{١٨٠}$ × $نق^{٢}$

⇐ مساحة القطاع [م أ، م ب] = $\frac{١}{٢}$ ط × $\frac{٦٠ْ}{١٨٠}$ × ٣٦ $سم^{٢}$

= ٦ ط $سم^{٢}$

الآن اقنع نفسك بأن △ م أ ب متطابق الأضلاع وأن ارتفاعه = ٣ $\sqrt{٣}$ سم.

لذا

مساحة △ م أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ $\sqrt{٣}$ = ٩ $\sqrt{٣}$ $سم^{٢}$

ولكن

مساحة المنطقة المظللة = مساحة القطاع الدائري ـ مساحة △ م أ ب

= ٦ ط ـ ٩ $\sqrt{٣}$

= ١٨,٨٤ ـ ١٥,٥٧

= ٣,٢٧ $سم^{٢}$

تمارين (٣ ـ ٣)

١ ـ حول إلى درجات :

(أ) ٣,٢ راديان　　　(ب) $\frac{ط}{٥}$ راديان

٢ ـ حول إلى راديان

(أ) ٢٣٥ْ　　　(ب) ١٤ْ ٤َ

٣ ـ أيهما أكبر :ـ

(أ) ١٢٩ْ أم ٢,١٦ راديان؟

(ب) ١٩ْ أم $\frac{١}{٣}$ راديان؟

٤ ـ تحقق مما يأتي :

(أ) $\frac{ط}{٢}$ راديان = ٩٠ْ   (ب) $\frac{ط}{٣}$ راديان = ٦٠ْ   (جـ) $\frac{ط}{٤}$ راديان = ٤٥ْ .

(د) $\frac{ط}{٦}$ راديان = ٣٠ْ   (هـ) $\frac{٢ ط}{٣}$ راديان = ١٢٠ْ .

٥ ـ أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٤٠ْ في دائرة نصف قطرها ٨ سم.

٦ ـ أوجد نصف قطر الدائرة التي فيها قوس طوله ٢ ط يقابل زاوية مركزية قياسها ٣٠ْ .

٧ ـ أوجد القياس الستيني لزاوية مركزية إذا كان التقدير الدائري لها هو ٤ ط رادياناً .

٨ ـ أوجد مساحة قطاع دائري زاويته المركزية ٧٠ْ في دائرة نصف قطرها ٨ سم.

٩ ـ قطاع دائري مساحته ٤٠ ط سم^{٢}، في دائرة نصف قطرها ١٠ سم أوجد زاويته المركزية بالتقدير الستيني.

تمـــاريـــن عـامـــــة

١ ـ أوجد عدد أقطار كل من المضلعات التالية :

(أ) المستطيل (ب) المخمس (جـ) المثمن (د) المعشَّر

٢ ـ إذا كان طولا ضلعين متناظرين في مضلعين متشابهين ٢ سم ، ٣ سم وكانت مساحة أصغر المضلعين تساوي ٣٦ سم^{٢} ، فأوجد مساحة المضلع الآخر.

٣ ـ مضلع رباعي أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٥ سم ، ٤ سم ، ٦ سم على الترتيب ، فإذا كان أقصر طول ضلع في مضلع مشابه هو ٩سم، فأوجد أطوال أضلاع المضلع الأكبر.

٤ ـ أوجد طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها ٤٥° في دائرة نصف قطرها ٧ سم.

٥ ـ أوجد نصف قطر الدائرة التي فيها قوس طوله ٢ ط يقابل زاوية مركزية قياسها ٤٥°.

٦ ـ قطاع دائري مساحته ٣٠ ط سم^{٢} في دائرة نصف قطرها ٨ سم أوجد زاويته المركزية بالتقدير الستيني.

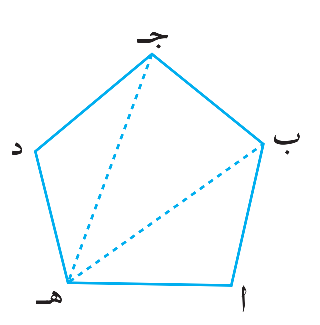
٧ ـ في الشكل التالي مخمسان متشابهان، نسبة التشابه تساوي $\frac{٣}{٥}$ قسِّما إلى مثلثات متشابهة بحيث مساحة المثلث جـ د هـ = ٩سم^{٢} ومساحة المثلث ب جـ هـ = ٢٧ سم^{٢}، مساحة المثلث أ ب هـ = ١٨ سم^{٢}

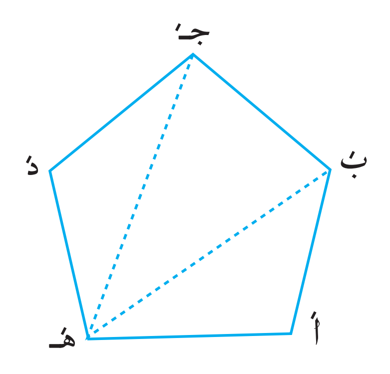
أوجد :

أولاً : مساحة المثلثات المتناظرة.

ثانياً : مساحتي المخمسين.

ثالثاً : إذا علم أن أحد أطوال المضلع الأصغر |أ ب| = ٩سم فأوجد الضلع المناظر له في الأكبر.





٨ ـ إطار صورة مستطيل الشكل أبعاده ٥ , ١ سم ، ٥ , ٢ سم على الترتيب يراد تكبيره ليصبح الضلع الأكبر طوله ١٠ سم ، فما هو محيط الصورة الكبرى.

٩ ـ ا ب جـ د ، اَ بَ جَـ دَ مضلعان متشابهان نُصِّف القطران [ب د] ، [بَ دَ] في النقطتين ﻫ ، ﻫَ على الترتيب. أثبت أن المثلثين ا ﻫ د ، اَ ﻫَ دَ متشابهان.

١٠ ـ مربع طول ضلعه ٣ ل سم قُسِّم كل من أضلاعه إلى ثلاثة أقسام متساوية. برهن أن نقط التقسيم هي رؤوس مثمن غير منتظم.

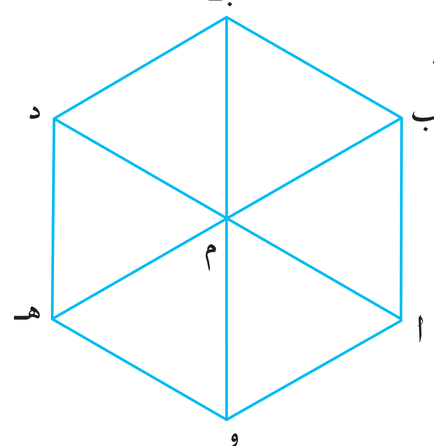
١١ ـ ا ب جـ د هـ و مسدس منتظم طول ضلعه ٥ سم وصلت الأقطار[ا د] ، [ب هـ] ، [جـ و] فتقاطعت في النقطة م (انظر الشكل المجاور)

أثبت أن

(أ) المثلث ا ب م متطابق الأضلاع.

(ب) المضلع و ا ب م يشابه المضلع ب جـ د م.

(جـ) أوجد طول القطر [ا د].



١٢ ـ ا ب جـ مثلث قائم الزاوية في ا أنزل العمود من ا على [ب جـ] ليلاقيه في د أثبت أن :

أولاً : $\frac{|ا جـ|^٢}{|ا د|^٢} = \frac{|ب جـ|}{|ب د|}$

ثانياً : $\frac{|ا ب|^٢}{|ا د|^٢} = \frac{|ب جـ|}{|جـ د|}$

١٣ ـ ا ب جـ مثلث فيه |ا ب| = ٣ سم ، |ب جـ| = ٥ سم ، |جـ ا| = ٤ سم

مُدَّ [ا جـ] على استقامته من جهة جـ وأُخذت عليه النقطة د بحيث |ا د| = ٦ سم

ورسم منها مستقيم يوازي [جـ ب] فقطع امتداد [أ ب] في هـ. والمطلوب :

أولاً : إثبات أن المثلثين أ هـ د ، أ ب جـ متشابهان.

ثانياً : حساب |أ هـ| ، |هـ د|

١٤ ـ برهن أن المثلثين المتطابقين متشابهان.

١٥ ـ برهن أنه إذا قسم محيط دائرة إلى عدة أقسام متساوية فالأوتار الواصلة بين نقط التقسيم المتتابعة تكوِّن مضلعاً منتظماً .

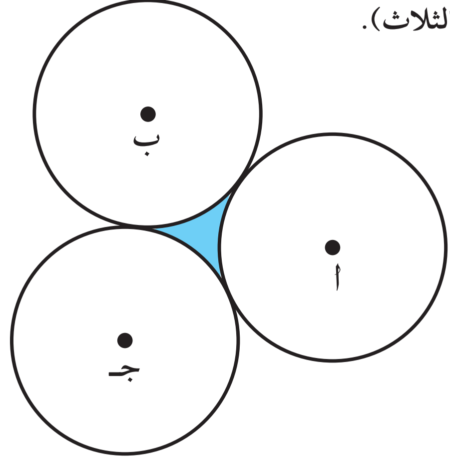
١٦ ـ إذا قسمنا محيط دائرة إلى ستة أقسام متساوية ، فأثبت أن المماسات للدائرة عند نقط التقسيم المتتابعة تشكل مسدساً منتظماً.

١٧ ـ برهن أنه إذا تشابه مضلعان منتظمان فإن نسبة نصفي قطري الدائرتين الداخليتين تساوي نسبة التشابه.

١٨ ـ برهن أنه إذا تشابه مضلعان منتظمان فإن نسبة محيطيهما تساوي نسبة نصفي قطري الدائرتين الداخليتين.

١٩ ـ اذكر العلاقة بين عدد أضلاع مضلع ما وعدد أقطاره. (ارشاد : استعن بالتمرين الأول في التمارين العامة).

٢٠ ـ في الشكل ثلاث دوائر متماسة ومتساوية نصف قطر كل منها نق .
احسب بدلالة نق مساحة المنطقة المظللة (المحصورة بين الدوائر الثلاث).



الباب الرابع

المعادلات والهندسة التحليلية

٤ ـ ١ المعادلات من الدرجة الثانية في مجهول واحد.
٤ ـ ٢ المعادلات الجبرية في متغيرين.
٤ ـ ٣ معادلة الخط المستقيم.
٤ ـ ٤ نظام معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين.
٤ ـ ٥ نظام معادلتين من الدرجة الثانية في متغيرين.
٤ ـ ٦ الدائرة.

٤ ـ ١ المعادلات من الدرجة الثانية في مجهول واحد

تلعب المعادلات الجبرية دوراً هاماً في كثير من التطبيقات العملية وتظهر في حلول مسائل لعدد من فروع المعرفة مثل الاقتصاد والفيزياء والكيمياء والزراعة والعلوم الهندسية. سنقوم في هذا البند بدراسة المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية بمجهول واحد والتي سبق أن درست جانباً منها في الصف الثالث المتوسط .. ولكن قبل البدء في دراسة هذه المعادلات نجد أن من الأنسب التعرف على طريقة تصنيف المعادلات الجبرية بمجهول واحد، فمثلاً توصف المعادلة

$$٢ \text{ س} + ٣ = ٠$$

بأنها معادلة من الدرجة الأولى لأن أعلى أس فيها على المجهول (أو المتغير) س هو العدد ١ . أما المعادلة

$$\frac{١}{٢} \text{ س}^{٢} - ٥ \text{ س} + ٧ = ٠$$

فتسمى معادلة من الدرجة الثانية لأن أعلى أس فيها على س هو العدد ٢ .

وبصورة عامة إذا كان لدينا معادلة على الصورة

$$\text{أ}_{ن} \text{ س}^{ن} + \text{أ}_{ن-١} \text{ س}^{ن-١} + \ldots + \text{أ}_{١} \text{ س} + \text{أ}_{٠} = ٠$$

وكان العدد $\text{أ}_{ن} \neq ٠$ فنقول : إن هذه المعادلة من الدرجة النونيَّة أو إن درجة المعادلة هي العدد ن .يسمى العدد $\text{أ}_{ن}$ معامل $\text{س}^{ن}$ ، والعدد $\text{أ}_{ن-١}$ معامل $\text{س}^{ن-١}$ وهكذا إلى أن نصل إلى العدد $\text{أ}_{٠}$ الذي يطلق عليه اسم الحد الثابت أو يمكننا اعتباره معامل $\text{س}^{٠}$ (سين أُسْ صفر)، حيث $\text{س}^{٠} = ١$ من أجل $\text{س} \neq ٠$

فعلى سبيل المثال المعادلة

$$٢ \text{ س}^{٣} - \text{س} + ١١ = ٠$$

وهي معادلة من الدرجة الثالثة معاملاتها هي $\text{أ}_{٣} = ٢$ ، $\text{أ}_{٢} = ٠$ ، $\text{أ}_{١} = -١$ ، $\text{أ}_{٠} = ١١$

تدريب (٤ ـ ١)

أوجد درجة ومعاملات كل من المعادلات التالية :

١) $٢ \text{ س}^{٤} - \text{س}^{٣} + ٢ \text{ س}^{٢} - ٧ = ٠$

٢) $-\text{س}^{٦} + \text{س}^{٥} - ٢ \text{ س}^{٣} + ١٢ \text{ س} = ٠$

٣) $س^{٧} - ١ = ٠$.

لنبدأ بدراسة معادلات الدرجة الثانية بمجهول واحد . إن الشكل القياسي العام لهذه المعادلات هو كما تعلم :

$$أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ = ٠$$

(٤ ـ ٤)

حيث أ ≠ ٠ ، ب ، جـ أعداد حقيقية، أما س فمجهول، نريد إيجاد قيمته التي تحقق المعادلة في مجموعة الأعداد الحقيقية ح .

لقد سبق لك أن درست جانباً من حل معادلات الدرجة الثانية بمجهول واحد في الصف الثالث المتوسط. في هذا البند سنقوم باستنتاج القانون العام الذي يعطي صيغة لحلول المعادلة (٤ـ٤). بدلالة المعاملات أ ، ب ، جـ . إن طريقة الاستنتاج تعتمد على فكرة إكمال المربع التي سبق أن درستها في المرحلة المتوسطة. ولكي نذكرك بهذه الطريقة دعنا نحل المعادلة التالية بطريقة إكمال المربع :

$$٦\,س^{٢} - ٥\,س + ١ = ٠ .$$

١ ـ نضيف −١ إلى طرفي المعادلة فنحصل على

$$٦\,س^{٢} - ٥\,س = -١$$

٢ ـ نقسم حدود المعادلة على معامل $س^{٢}$ فتصبح المعادلة

$$س^{٢} - \frac{٥}{٦}\,س = -\frac{١}{٦}$$

٣ ـ نضيف مربع نصف معامل س إلى الطرفين فيكون :

$$س^{٢} - \frac{٥}{٦}\,س + \frac{٢٥}{١٤٤} = -\frac{١}{٦} + \frac{٢٥}{١٤٤}$$

٤ ـ لقد أصبح الطرف الأيمن مربعاً كاملاً . إذن يمكن كتابة المعادلة على الصورة :

$$\left(س - \frac{٥}{١٢}\right)^{٢} = -\frac{١}{٦} + \frac{٢٥}{١٤٤}$$

$$= \frac{-٢٤ + ٢٥}{١٤٤}$$

$$= \frac{١}{١٤٤}$$

٥ ـ نستخرج الجذر التربيعي للطرفين مع ملاحظة وضع الإشارة $\pm$ فنحصل على :

$$س - \frac{٥}{١٢} = \pm \sqrt{\frac{١}{١٤٤}} = \pm \frac{١}{١٢} .$$

أي أن : $س - \frac{٥}{١٢} = \frac{١}{١٢}$ أو $س - \frac{٥}{١٢} = - \frac{١}{١٢}$

وعليه تكون جذور (حلول) المعادلة هي :

$$س = \frac{٥}{١٢} + \frac{١}{١٢} = \frac{٦}{١٢} = \frac{١}{٢} \text{ أو } س = \frac{٥}{١٢} - \frac{١}{١٢} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$$

لكي نستنتج القانون العام لحلول المعادلة :

$$أ س^٢ + ب س + جـ = ٠ ، أ \neq ٠ .$$

نتبع الخطوات الواردة في المثال السابق :

١ ـ نضيف – جـ إلى الطرفين فنجد :

$$أ س^٢ + ب س = - جـ \qquad (٤ - ٥)$$

٢ ـ نقسم جميع الحدود على معامل $س^٢$ فنحصل على :

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س = \frac{- جـ}{أ} \qquad (٤ - ٦)$$

٣ ـ نضيف مربع نصف معامل س إلى الطرفين فتصبح المعادلة :

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{ب^٢}{٤ أ^٢} = \frac{- جـ}{أ} + \frac{ب^٢}{٤ أ^٢} \qquad (٤ - ٧)$$

٤ ـ حيث إن الطرف الأيمن يصبح مربعاً كاملاً. فيمكن كتابة المعادلة على الصورة :

$$(س + \frac{ب}{٢ أ})^٢ = \frac{- جـ}{أ} + \frac{ب^٢}{٤ أ^٢} \qquad (٤ - ٨)$$
$$= \frac{ب^٢ - ٤ أ جـ}{٤ أ^٢}$$

٥ ـ نأخذ الجذر التربيعي للطرفين فنجد :

$$س + \frac{ب}{٢ أ} = \pm \sqrt{\frac{ب^٢ - ٤ أ جـ}{٤ أ^٢}} = \pm \frac{\sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$$

$$\Leftarrow \text{س} = -\frac{\text{ب}}{٢\text{أ}} \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}}$$

$$\Leftarrow \text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أجـ}}}{٢\text{أ}} \qquad (٤ - ٩)$$

وتسمى الصيغة (٤ ـ ٩) القانون العام لجذري معادلة الدرجة الثانية بمجهول واحد.

ملاحظة (٤ ـ ١)

١ ـ نود أن نؤكد أن الكلمتين جذر المعادلة وحل المعادلة مترادفتان في المعنى.

٢ ـ إن الصيغة (٤ ـ ٩) تشير إلى أن عدد حلول المعادلة (٤ ـ ٦) في ح لا يمكن أن يزيد عن اثنين.

٣ ـ يُسمّى المقدار $\text{ب}^{٢} - ٤$ أ جـ مميز المعادلة (٤ ـ ٤) ونرمز له بالحرف ز ويمكننا كتابة القانون العام (٤ ـ ٩) بدلالة ز فيكون

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ز}}}{٢\text{أ}}$$

إن دور المميز ز يكمن في تحديد عدد جذور المعادلة (٤ ـ ٤) في مجموعة الأعداد الحقيقية ح كما سيتضح ذلك من خلال الأمثلة التالية :

مثال (٤ ـ ١)

حل المعادلة ٢ $\text{س}^{٢}$ + ٣ س − ٢ = ٠ .

الحــــلّ :

أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = −٢ .

ز = $\text{ب}^{٢}$ − ٤ أ جـ = ٩ − ٤ × ٢ × (−٢) .

= ٩ − (−١٦) = ٢٥ .

إذن حلول المعادلة هي :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ز}}{٢أ} = \frac{-٣ \pm \sqrt{٢٥}}{٤}$$

$$= \frac{-٣ \pm ٥}{٤}$$

أي أن هناك جذرين هما $س = \frac{-٣ + ٥}{٤} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

أو $س = \frac{-٣ - ٥}{٤} = \frac{-٨}{٤} = -٢$

لاحظ أنه يمكن حل المعادلة أعلاه بطريقة التحليل حيث أن :

$٢ س^٢ + ٣ س - ٢ = (٢ س - ١)(س + ٢) = ٠$

ومن ذلك نستنتج أنه إما $٢ س - ١ = ٠ \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$

أو $س + ٢ = ٠ \Leftarrow س = -٢$

مثال (٤ ـ ٢)

حل المعادلة $- س^٢ + ٤ س = ٤$

الحـــلّ :

أولاً لكي نحل المعادلة بطريقة القانون العام نضع المعادلة في شكلها القياسي

$أ س^٢ + ب س + جـ =$

وذلك بإضافة العدد -٤ إلى طرفيّ المعادلة لنحصل على

$- س^٢ + ٤ س - ٤ = ٤ + (-٤)$

$\Leftarrow -س^٢ + ٤ س - ٤ = ٠$

إن معاملات المعادلة – س^{٢} + ٤ س – ٤ = ٠ هي :

أ = –١ ، ب = ٤ ، جـ = –٤

المميز ز = ب^{٢} – ٤ أ جـ = ١٦ – ٤ × (–١) × (–٤)

= ١٦ – ١٦ = ٠

∴ حلول المعادلة هي س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ز}}{٢ أ}$ = $\frac{-٤ \pm \sqrt{٠}}{-٢}$

= ٢

أي إن هناك جذراً واحداً فقط للمعادلة – س^{٢} + ٤ س = ٤ .

يمكننا حل المعادلة أعلاه باستخدام التحليل إلى العوامل على النحو التالي :

نضرب طرفي المعادلة بالعدد (–١) لتصبح :

س^{٢} – ٤ س = – ٤ .

نضيف العدد ٤ إلى طرفي المعادلة لنحصل على

س^{٢} – ٤ س + ٤ = صفر.

نحلل الطرف الأيمن فيكون

(س – ٢) (س – ٢) = صفر

⇐ س – ٢ = ٠ أو س – ٢ = ٠ .

⇐ س = ٢ أو س = ٢ .

إذن يوجد جذر واحد (مكرر) للمعادلة هو س = ٢ .

أوردنا في المثالين السابقين طريقة التحليل إلى العوامل وذلك بالإضافة إلى طريقة استخدام القانون العام. إن هدفنا من ذلك هو التأكيد على أن طريقة التحليل إلى العوامل التي سبق أن درستها في الصف الثالث المتوسط هي طريقة مفيدة يمكن أن تستخدمها في حل معادلات الدرجة الثانية متى ما وَجدتَ عملية التحليل إلى العوامل أمراً يسيراً.

مثال (٤ ـ ٣)

حل المعادلة ٥ س^{٢} + ١ = –٢س

الحـــلّ :

ننقل المقدار -٢ س للطرف الأيمن من المعادلة وذلك لوضعها في شكلها القياسي :

$٥ س^٢ + ٢ س + ١ = ٠$.

في هذه الحالة أ $=$ ٥ ، ب $=$ ٢ ، جـ $=$ ١ .

ز $=$ ب$^٢ - ٤$ أ جـ

$= ٢^٢ - ٤ \times ٥ \times ١$

$= ٤ - ٢٠ = -١٦$

إذن حسب القانون العام تكون جذور المعادلة هي :

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{-١٦}}{١٠}$$

وهنا لنا وقفة. إن العدد $\sqrt{-١٦}$ لا يمكن أن يكون عدداً حقيقياً لأنه لا يوجد عدد حقيقي مربعه عدد سالب.

نستنتج من ذلك أن العددين $\frac{-٢ \pm \sqrt{-١٦}}{١٠}$ غير حقيقيين.

إذن ليس هناك حل للمعادلة $٥ س^٢ + ١ = -٢$ س في المجموعة ع

مثال (٤ ـ ٤)

حل المعادلة $\sqrt{٢}$ س$^٢ - \frac{١}{٣}$ س $- ١ = ٠$

الحـــلّ :

في هذه المعادلة أ $= \sqrt{٢}$ ، ب $= -\frac{١}{٣}$ ، جـ $= -١$

ز $=$ ب$^٢ - ٤$ أ جـ

$= (-\frac{١}{٣})^٢ - ٤ (\sqrt{٢}) \times (-١)$

$= \frac{١}{٩} - (-٤ \sqrt{٢})$

$$= \frac{١}{٩} + ٤\sqrt{٢}$$

$$= \frac{١ + ٣٦\sqrt{٢}}{٩}$$

لذا فإن ز عدد حقيقي موجب إذن $\sqrt{ز}$ عدد حقيقي وعليه يوجد حلاّن للمعادلة في المجموعة ح هما :

$$س = \frac{-(-\frac{١}{٣}) \pm \sqrt{\frac{١ + ٣٦\sqrt{٢}}{٩}}}{٢\sqrt{٢}}$$

$$= \frac{\frac{١}{٣} \pm \frac{١}{٣}\sqrt{١ + ٣٦\sqrt{٢}}}{٢\sqrt{٢}} = \frac{١ \pm \sqrt{١ + ٣٦\sqrt{٢}}}{٦\sqrt{٢}}$$

ولو بسَّطنا المعادلة قبل البدء بحلِّها وذلك بضرب طرفيها في ٣ تخلُّصاً من المقام لأصبحت :
$٣\sqrt{٢}\,س^{٢} - س - ٣ = ٠$. حيث :

$أ = ٣\sqrt{٢}$ ، ب = − ١ ، جـ = − ٣ وعليك إنجاز الحل لتحصل على الجذرين

$$= \frac{١ \pm \sqrt{١ + ٣٦\sqrt{٢}}}{٦\sqrt{٢}}$$

ملاحظة (٤ ـ ٢)

فيما تقدم من الأمثلة يمكن للطالب أن يستنتج دور المميز ز في تحديد عدد حلول المعادلة
$أ\,س^{٢} + ب\,س + جـ = ٠$ في مجموعة الأعداد الحقيقية ح على النحو التالي :

١ ـ إذا كان ز $>$ ٠ فإن للمعادلة (٤ ـ ٤) جذرين مختلفين هما :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ز}}{٢أ}$$

٢ ـ إذا كان ز = ٠ فإن للمعادلة (٤ ـ ٤) جذرين متساويين كل منهما يساوي $\frac{-ب}{٢أ}$.

٣ ـ إذا كان ز $<$ ٠ فإنه لا يوجد للمعادلة (٤ ـ ٤) جذور في ع ونقول : إن المعادلة مستحيلة الحل في ع .

مثال (٤ ـ ٥)

أوجد عدد حلول المعادلات التالية في ع

١ – س^{٢} – ٣ س + $\sqrt{٣}$ = ٠

٢ ـ $\frac{١١}{١٣}$ س^{٢} = – ٣ س – ٥

٣ ـ $\frac{١}{٤}$ س^{٢} – $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ س = – $\frac{١}{٢}$

الحـــل :

١ ـ المعادلة مكتوبة بشكلها القياسي

إذن أ = ١ ، ب = – ٣ ، جـ = $\sqrt{٣}$

ز = ب^{٢} – ٤ أ جـ

= ٩ – ٤ $\sqrt{٣}$

ولما كان $\sqrt{٣}$ $<$ ٢ لذا فإن ٤ $\sqrt{٣}$ $<$ ٨ $<$ ٩

إذن ز = ٩ – ٤ $\sqrt{٣}$ $>$ ٠

نستنتج أنه يوجد حلاّن للمعادلة س^{٢} – ٣ س + $\sqrt{٣}$ = ٠ في ع

٢ ـ نكتب المعادلة بشكلها القياسي فتصبح

$\frac{١١}{١٣}$ س^{٢} + ٣ س + ٥ = ٠

لتسهيل الحسابات نضرب طرفيّ المعادلة في ١٣ فنحصل على

١١ س^{٢} + ٣٩ س + ٦٥ = ٠

في هذه الحالة أ = ١١ ، ب = ٣٩ ، جـ = ٦٥

ز = ب^{٢} – ٤ أ جـ

= (٣٩)^{٢} – ٤ × ١١ × ٦٥

= ١٥٢١ – ٢٨٦٠ = – ١٣٣٩ $<$ ٠

إذن لا يوجد حل للمعادلة $\frac{١١}{١٣}$ س^{٢} = − ٣ س − ٥ في ع

٣ ـ نكتب المعادلة بشكلها القياسي فتصبح

$$\frac{١}{٤} \text{س}^{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \text{س} + \frac{١}{٢} = ٠$$

إذن أ = $\frac{١}{٤}$ ، ب = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جـ = $\frac{١}{٢}$

ز = ب^{٢} − ٤ أ جـ

$$= \frac{١}{٢} - ٤ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢} = ٠$$

إذن يوجد حل واحد للمعادلة $\frac{١}{٤}$ س^{٢} − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ س = − $\frac{١}{٢}$ في المجموعة ع

إن طريقة حل معادلات الدرجة الثانية بمجهول واحد يمكن أن تستعمل في حل معادلات تحوي جذوراً تربيعية كما في المثالين التاليين :

مثال (٤ ـ ٦)

حل المعادلة $\sqrt{\text{س}}$ + ٦ = ٢ س

الحـــلّ :

أولاً نعزل الحد الذي يحوي $\sqrt{\text{س}}$ في الطرف الأيمن من المعادلة وذلك بإضافة −٦ إلى طرفيْ المعادلة فنحصل على :

$\sqrt{\text{س}}$ = ٢ س − ٦

نربع طرفيْ المعادلة فتصبح :

س = (٢ س − ٦)^{٢} = ٤ س^{٢} − ٢٤ س + ٣٦

نحول المعادلة إلى الشكل القياسي

٤ س^{٢} − ٢٥ س + ٣٦ = ٠ (٤ − ١٠)

في هذه الحالة أ = ٤ ، ب = − ٢٥ ، جـ = ٣٦

ز = ب^{٢} − ٤ أ جـ

= ٦٢٥ − ٤ × ٤ × ٣٦ = ٤٩

إذن حلول المعادلة (٤ ـ ١٠) هي

س = $\frac{٢٥ + ٧}{٨}$ = $\frac{٣٢}{٨}$ = ٤

أو س = $\frac{٢٥ - ٧}{٨}$ = $\frac{١٨}{٨}$ = $\frac{٩}{٤}$

هنا يجب أن نكون حذرين لأن المعادلة (٤ ـ ١٠) نتجت من تربيع المعادلة الأصلية، وإن عملية تربيع طرفي المعادلة لا يُنتج على العموم معادلة مكافئة . بل إن عملية تربيع طرفيْ معادلة قد تضيف جذوراً لا تحقق المعادلة الأصلية، ولكنها لا تُنقص من جذور تلك المعادلة، والسبب في ذلك يرجع إلى أن

أ = ب ⇐ أ^{٢} = ب^{٢} ولكن أ^{٢} = ب^{٢} ⇍ أ = ب

إذ يمكن أن يكون أ = −ب

إذن يجب علينا اختيار حليْ المعادلة (٤ ـ ١٠) بتعويض كل منهما في المعادلة $\sqrt{س}$ = ٢ س − ٦

نبدأ بالحل س = ٤

الطرف الأيمن = $\sqrt{٤}$ = ٢

الطرف الأيسر = ٢ × ٤ − ٦ = ٢

وعليه فإن القيمة س = ٤ تحقق المعادلة الواردة في المثال

الآن نختبر الحل س = $\frac{٩}{٤}$

الطرف الأيمن = $\sqrt{\frac{٩}{٤}}$ = $\frac{٣}{٢}$

الطرف الأيسر = ٢ × $\frac{٩}{٤}$ − ٦ = − $\frac{٣}{٢}$

إذن الطرف الأيمن ≠ الطرف الأيسر

نستنتج من ذلك أن القيمة س = $\frac{٩}{٤}$ لا تحقق المعادلة الواردة في المثال.

إذن يوجد للمعادلة $\sqrt{س + ٦}$ = ٢ س حل واحد في ح هو س = ٤

مثال (٤ ـ ٧)

حل المعادلة

$$\sqrt{س - ١} = \frac{١}{٤} س + \frac{١}{٢}$$

الحـــلّ :

لتسهيل الحسابات نضرب طرفيْ المعادلة ٤ فنحصل على

$٤ \sqrt{س - ١}$ = س + ٢

⇐ ١٦ (س − ١) = $(س + ٢)^٢$

= $س^٢$ + ٤ س + ٤

وذلك بتربيع طرفيْ المعادلة

نحول المعادلة الجديدة إلى الشكل القياسي لتصبح

$س^٢$ − ١٢ س + ٢٠ = ٠

في هذه الحالة أ = ١ ، ب = − ١٢ ، جـ = ٢٠

ز = $ب^٢$ − ٤ أ جـ

= ١٤٤ − ٤ × ١ × ٢٠ = ٦٤

إذن حلول المعادلة الجديدة هي :

س = $\frac{١٢ + ٨}{٢}$ = ١٠ أو س = $\frac{١٢ - ٨}{٢}$ = ٢

الآن نختبر كلاّ من الحلين في المعادلة $\sqrt{س - ١} = \frac{١}{٤} س + \frac{١}{٢}$

أولاً : س = ١٠

الطرف الأيمن = $\sqrt{١٠ - ١}$ = $\sqrt{٩}$ = ٣

الطرف الأيسر = $\frac{١}{٤} \times ١٠ + \frac{١}{٢} = ٣$

إذن س = ١٠ تحقق المعادلة الأصلية.

ثانياً : س = ٢

الطرف الأيمن = $\sqrt{٢ - ١} = ١$

الطرف الأيسر = $\frac{١}{٤} \times ٢ + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} = ١$

∴ القيمة س = ٢ تحقق المعادلة الأصلية.

نستنتج أن المعادلة $\sqrt{س - ١} = \frac{١}{٤} س + \frac{١}{٢}$ حلّين في مجموعة الأعداد الحقيقية ع ، وهما نفس حلول المعادلة الناتجة عن عملية التربيع.

العلاقة بين جذريْ المعادلة أ س^٢ + ب س + جـ = ٠ ومعاملِاتها

لنعتبر المعادلة (٤ ـ ٤) وهي

أ س^٢ + ب س + جـ = ٠ ، حيث أ ≠ ٠

ولنفرض أن المميز ز ≮ ٠ . من الملاحظة (٤ ـ ٢) يوجد للمعادلة (٤ ـ ٤) جذران في ع هما

$$\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$ حسب قانون (٤ – ٩)

اجعل $ل_١ = \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ}$ ،

$ل_٢ = \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ}$ ثم احسب $ل_١ + ل_٢$ ، $ل_١ . ل_٢$ ، ستجد أن

$$ل_١ + ل_٢ = \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$

$$= \frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ} - ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ}$$

$$= \frac{-٢ب}{٢أ} = -\frac{ب}{أ}$$ (٤ ـ ١١)

$$ل_١ ل_٢ = \left(\frac{-ب + \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ}\right)\left(\frac{-ب - \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢أ}\right)$$

$$= \frac{(-ب)^٢ - \left(\sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}\right)^٢}{٤أ^٢}$$

$$= \frac{ب^٢ - \left(\sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}\right)^٢}{٤أ^٢}$$

$$= \frac{ب^٢ - (ب^٢ - ٤ أ جـ)}{٤أ^٢}$$

$$= \frac{جـ}{أ}$$

إذا قسمنا المعادلة (٤ ـ ٤) على أ نحصل على المعادلة المكافئة

$$س^٢ + \frac{ب}{أ} س + \frac{جـ}{أ} = ٠ \qquad (٤ ـ ١٢)$$

وباستخدام العلاقتين (٤ ـ ١١) و (٤ ـ ١٢)، يمكن كتابة هذه المعادلة بالصورة :

$$س^٢ - (ل_١ + ل_٢) س + ل_١ ل_٢ = ٠ \qquad (٤ ـ ١٣)$$

وبتحليل الطرف الأيمن من هذه المعادلة نحصل على :

$$(س - ل_١)(س - ل_٢) = ٠$$

تتضح أهمية العلاقات التي توصلنا إليها من خلال الأمثلة التالية :

مثال (٤ـ٨)

أوجد المعادلة من الدرجة الثانية التي جذراها $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٧}{٦}$

الحـــلّ :

لدينا $ل_١ = \frac{٣}{٢}$ ، $ل_٢ = \frac{٧}{٦}$

$$ل_١ + ل_٢ = \frac{٣}{٢} + \frac{٧}{٦} = \frac{٩ + ٧}{٦} = \frac{١٦}{٦} = \frac{٨}{٣}$$

$$ل_1 ل_2 = \frac{٣}{٢} \times \frac{٧}{٦} = \frac{٧}{٤}$$

وبتطبيق العلاقة (٤ ـ١٣) نجد المعادلة

$$س^٢ - \frac{٨}{٣} س + \frac{٧}{٤} = ٠$$

مثال (٤ ـ ٩)

أوجد العددين اللذين مجموعهما يساوي ٧ ومجموع مقلوبيهما يساوي $\frac{٧}{١٠}$.

الحـــلّ :

نفرض أن العدد الأول يساوي س ، فيكون العدد الثاني ٧ − س

مجموع مقلوبيّ العددين بدلالة س هو $\frac{١}{س} + \frac{١}{٧ - س}$

إذن $\frac{١}{س} + \frac{١}{٧ - س} = \frac{٧}{١٠}$

$$\Leftarrow \quad \frac{٧ - س + س}{س (٧ - س)} = \frac{٧}{١٠}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{٧}{٧ س - س^٢} = \frac{٧}{١٠}$$

$$\Leftarrow \quad ٧ س - س^٢ = ١٠$$

$$\Leftarrow \quad س^٢ - ٧ س + ١٠ = ٠$$

$$\Leftarrow \quad س = \frac{٧ \pm \sqrt{٤٩ - ٤٠}}{٢} = \frac{٧ \pm ٣}{٢}$$

$$\Leftarrow \quad س = ٥ \text{ أو } س = ٢$$

إذاكان س = ٥ فإن ٧ − س = ٢

وإذا كان س = ٢ فإن ٧ − س = ٥

إذن العددان هما ٢ وَ ٥

من تراثنا المشرق :

وما دمنا بصدد حل معادلة الدرجة الثانية بمجهول واحد فإنه يجدر بنا أن نذكّرك بأن أول من قام بحلّها هو العالم الرياضي المسلم، مبتكر علم الجبر (محمد بن موسى الخوارزمي) في كتابه الشهير (كتاب الجبر والمقابلة)، حيث قام بحلّها بطريقة جبرية أخرى هندسية، متبعاً أسلوب الإكمال إلى المربع، نورد فيما يلي إحدى هذه الطرق.

فلحلّ المعادلة : س^{٢} + ١٠ س = ٣٩ بطريقة الخوارزمي الهندسية

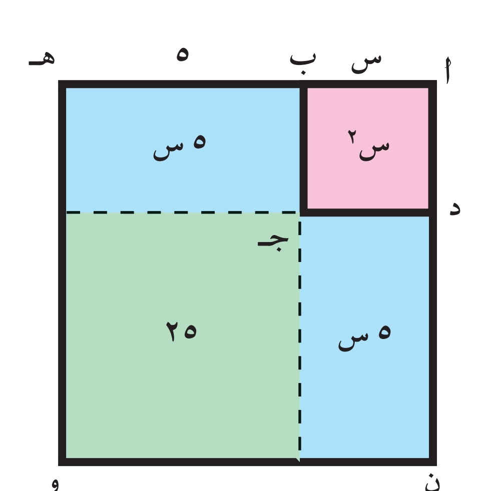
نرسم مربعاً ونفرض أن طول ضلعه س فتكون مساحة س^{٢}

ثم نرسم مستطيلين طول كل منهما ٥ وينطبق عرضه على ضلع المربع فتكون مساحة كل منهما ٥ س، ثم نكمل الشكل إلى مربع فتكون مساحته :

س^{٢} + ١٠ س + ٢٥

ويكون طول ضلعه (س + ٥)

انظر الشكل المجاور.



بهذه العملية نكون قد أضفنا ٥^{٢} إلى الطرف الأيمن من المعادلة التي تصبح :

س^{٢} + ١٠ س + ٢٥ = ٣٩ + ٢٥

أو : (س + ٥)^{٢} = ٦٤

أي أن طول ضلع المربع أ هـ و ن هو ٨

فتكون قيمة س هي ٣

ولم يتطرق الخوارزمي في هذه الطريقة الهندسية إلى الحل الآخر، ذلك أنك تعرف أن الحل لهذه المعادلة :

س + ٥ = $\pm$ ٨

س = ٣ ، س = −١٣

تمارين (٤ ـ ١)

١) حدد الدرجة والمعاملات في كل من المعادلات التالية :

(أ) ٣ س = ١

(ب) س^{٢} = س

(جـ) ٣ س^{٢} + ١١ = ٠

(د) س^{٢} − ٦ س + ٩ = ٠

(هـ) س^{٣} − ٢ = س^{٤} + س

(و) ٤ س^{٤} − س^{٢} = (٢ س^{٢} − ٣)^{٢}

في التمارين من (٢) إلى (١٣) أوجد حلول المعادلات في مجموعة الأعداد الحقيقية ح إن وُجدت :

٢) س^{٢} − ٢ = س

٣) (س + ١)^{٢} = ٢ − س

٤) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} − $\frac{٣}{٥}$ س = ١

٥) ٢ س^{٢} = س − ٢

٦) $\frac{١}{٢}$ س^{٢} + (١ + $\sqrt{٣}$) س + $\sqrt{٣}$ = ٠

٧) س^{٢} − ($\sqrt{٢}$ + $\sqrt{٦}$) س + $\sqrt{٣}$ = ٠

٨) س^{٢} − ٢٥ س + ٢١ = ٠

٩) (س − ٢) (س + ٣) = س + ١٠

١٠) (س + ٣) (س + ٤) + (س + ١) (س + ٤) = ٠

١١) (س − ٥)^{٢} + (س − ٥) = ٠

١٢) $(٢س + ١١)(-س + \frac{١}{٢}) = ٤$

١٣) $(س - ٢)(س + ٢) = س$

في التمارين من (١٤) إلى (١٦) حل المعادلات ثم تحقق من صحة الحل

١٤) $\sqrt{س} = -س + ٦$

١٥) $س - ٢\sqrt{س + ٢} + ٢ = ٠$

١٦) $س = \sqrt{س - ٣}$

١٧) ما هما العددان اللذان مجموعهما يساوي ١٣ ومجموع مربعيهما يساوي ٨٩؟

١٨) أوجد العدد الطبيعي الذي إذا ضرب بحاصل جمعه مع العدد ٨ كان الناتج ١٢٨.

١٩) بفرض أن د، هـ عددان حقيقيان، أوجد حلول المعادلات التالية بدلالة د أو هـ :

(أ) $س^٢ + (د - هـ) س - د هـ = ٠$

(ب) $س^٢ + \sqrt{٣} س - د^٢ = ٠$

(جـ) $د س^٢ + هـ س - د = ٠$

٢٠) اعتبر المعادلة

$هـ س^٢ - ٢ (هـ - ٢) س + هـ - ٣ = ٠$ ، حيث هـ رمز لعدد حقيقي

(أ) أوجد قيمة هـ التي تجعل للمعادلة حلاً حقيقياً واحداً.

(ب) أوجد قيمة هـ التي تجعل أحد الحلّين يساوي ٣ ثم أوجد الحل الآخر.

(جـ) إذا رمزنا لحلي المعادلة أعلاه بالرمزين $ل_١$ ، $ل_٢$ فأوجد قيمة هـ التي تجعل

$٤ (ل_١ + ل_٢) = ٧ ل_١ ل_٢$

٤ ـ ٢ المعادلات الجبرية في متغيرين

يبرز دور الهندسة التحليلية كوسيلة تجمع بين الهندسة والجبر بشكل واضح في التمثيل البياني للمعادلات الجبرية في متغيرين، واستناداً إلى تصنيف المعادلات الجبرية في المتغيِّر (المجهول) الواحد المقدم في البند السابق، سنعتبر المعادلة

$$ص - ٣س = ٣ \qquad (٤ ـ ١٤)$$

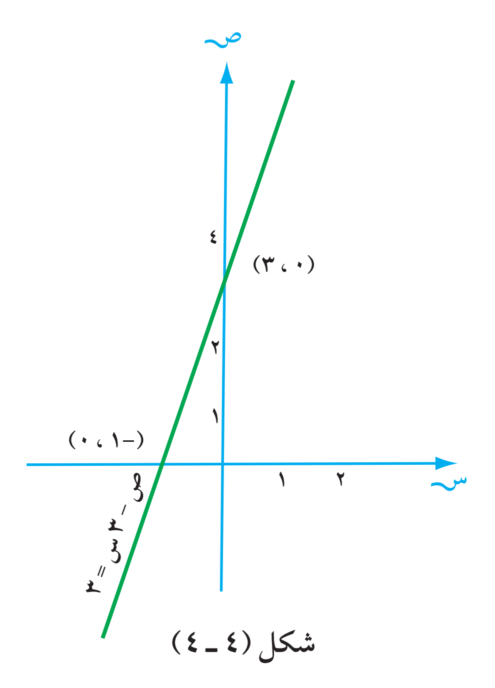
معادلة من الدرجة الأولى في المتغيرين س وَ ص

وقد سبق أن درست في المرحلة المتوسطة بأنه يمكن تمثيل المعادلة (٤ ـ ١٤) بيانياً بواسطة خط مستقيم يتحدد بمعرفة نقطتين عليه، وذلك بإعطاء س قيمتين مختلفتين وإيجاد قيم ص المناظرة من المعادلة، فعلى سبيل المثال

س = صفر ⇐ ص = ٣

س = − ١ ⇐ ص = ٣ − ٣

= ٠



شكل (٤ ـ ٤)

أي أن الرسم البياني للمعادلة (٤ ـ ١٤) هو المستقيم الذي يمر بالنقطتين (٠ ، ٣) وَ (− ١ ، ٠) كما في الشكل (٤ − ٤).

والصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى في المتغيرين س وَص هي :

أ س + ب ص + جـ = ٠ (٤ ـ ١٥)

حيث أ ، ب ، جـ أعداد ثابتة ، وأحد المعاملين أ ، ب ، لا يساوي الصفر . ويمثل المعادلة (٤ ـ ١٥) في المستوى الإحداثي خط مستقيم كما سبق أن تعلمت، ولذلك تسمى هذه المعادلة أحياناً المعادلة الخطية في المتغيرين س وَ ص.

أما المعادلة

ص + س^{٢} = ٩ (٤ − ١٦)

فليست من الدرجة الأولى وإنما من الدرجة الثانية لوجود حد من الدرجة الثانية هو س^{٢} ، وهي حالة خاصة من الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في متغيرين :

أ س^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س ص + د س + هـ ص + و = ٠ (٤ ـ ١٧)

حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و، أعداد ثابتة وأحد المعاملات أ ، ب ، جـ لا يساوي الصفر.

وبذلك تكون درجة المعادلة الجبرية في س وَص مساوية لأعلى أُس على المتغير س عندما نجعل

ص = س ، فعلى سبيل المثال

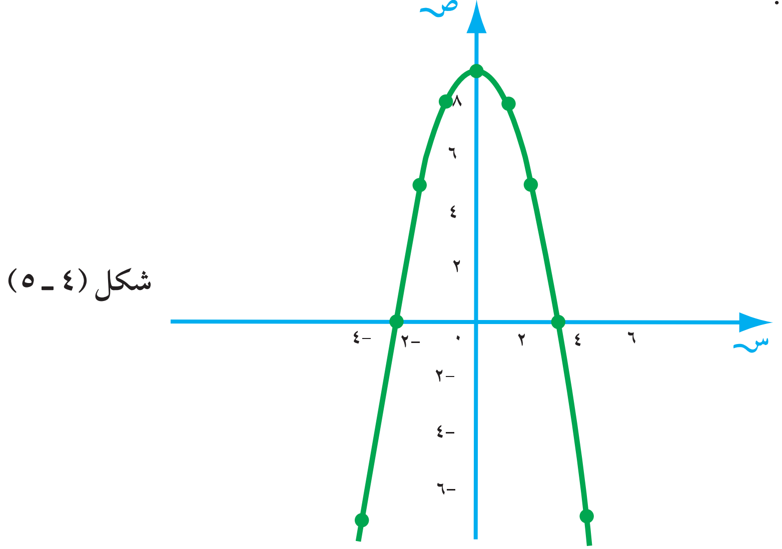
س ص = ١

معادلة من الدرجة الثانية لأنه إذا جعلنا ص = س تصبح س^{٢} = ١ من الدرجة الثانية، والمعادلة : س^{٣} + (ص + ٥)^{٢} − ٧ = ٠ من الدرجة الثالثة، وهكذا.

تختلف المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية فأكبر عن معادلة الدرجة الأولى في ناحية جوهرية، وهي أنه لا يمكن تمثيلها بيانياً بخط مستقيم يتحدَّد بمعرفة نقطتين عليه، وإنما تمثل بمنحنٍ يتطلب رسمه تحديد مجموعة من النقط (س ، ص) التي تحقق المعادلة. فعلى سبيل المثال يمكننا رسم منحني المعادلة (٤ ـ ١٦) بأن نعطي أحد المتغيرين، وليكن س، قيماً مختلفة كالأعداد الصحيحة من −٤ إلى ٤ ونحسب قيمة ص في كل مرة من المعادلة ص = ٩ − س^{٢} ، كما في الجدول التالي :

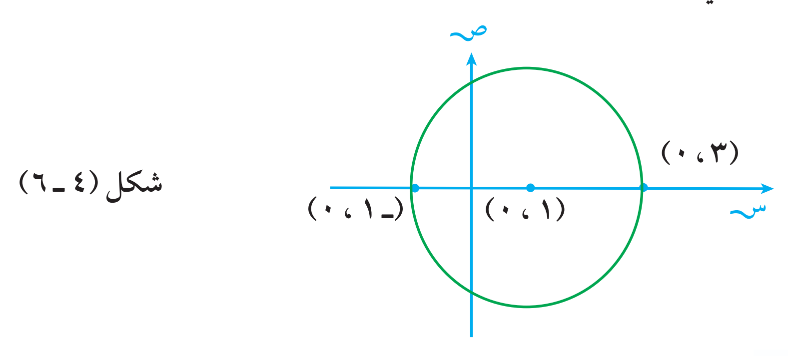
س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص	−٧	٠	٥	٨	٩	٨	٥	٠	−٧

ثم نعين على المستوى الإحداثي النقط (−٤ ، −٧) ، (−٣ ، ٠)، . . . . إلخ التي حصلنا عليها بهذه الطريقة ، فنلاحظ أنها ليست على استقامة واحدة وإنما تقع على المنحني المبيَّن في الشكل (٤ ـ ٥).



شكل (٤ ـ ٥)

هناك، بطبيعة الحال، معادلات مثل (س − ١)^{٢} + ص^{٢} = ٤ سبق لك دراستها ويمكنك التعرف على رسمها البياني دون الحاجة إلى وضع جدول، فهذه معادلة دائرة مركزها (١ ، ٠) ونصف قطرها ٢ ، كما في الشكل (٤ ـ ٦).



شكل (٤ ـ ٦)

مثال (٤ ـ ١٠)

صنف المعادلة ص = $\sqrt{\text{س} + ١}$ وارسم المنحني الذي يمثلها.

الحـــلّ :

يتطلب الأمر، لتحويل هذه المعادلة إلى الصورة القياسية، وأن نتخلص من الجذر التربيعي على س + ١ ، وهذا يتحقق بتربيع طرفيْ المعادلة للحصول على

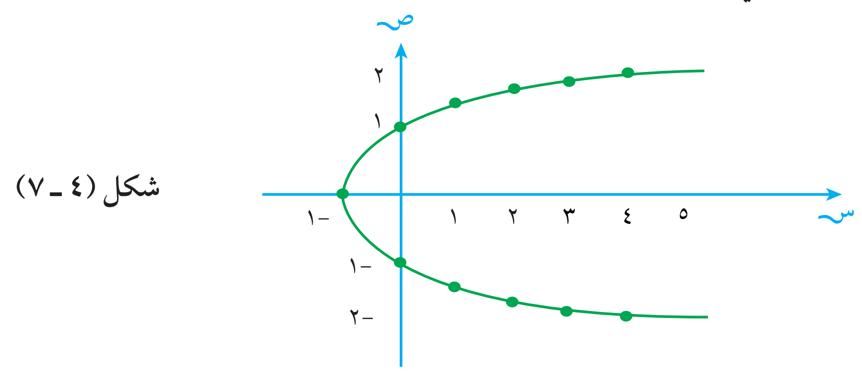
ص^{٢} = س + ١

وهي معادلة من الدرجة الثانية. نلاحظ هنا أن ص^{٢} = س + ١ ≥ ٠

لأن مربع العدد الحقيقي ص لا يمكن أن يكون عدداً سالباً، مما يعني أن س ≥ −١، فنضع الجدول التالي ابتداءً من س = − ١

س	−١	٠	١	٢	٣	٤
ص^{٢} = س + ١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	٠	± ١	± $\sqrt{٢}$	± $\sqrt{٣}$	± ٢	± $\sqrt{٥}$

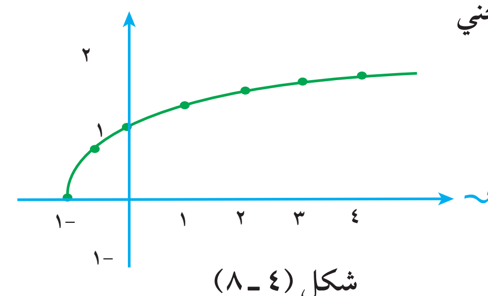
ومن الآلة الحاسبة نجد أن $\sqrt{٢} \approx ١,٤$ ، $\sqrt{٣} \approx ١,٧$ ، $\sqrt{٥} \approx ٢,٢$ فنحصل على الشكل (٤ ـ ٧) الذي يمثل المعادلة ص^٢ = س + ١



شكل (٤ ـ ٧)

ولكن ص^٢ = س + ١ ⟺ ص = ± $\sqrt{س + ١}$

أي أن المعادلة ص^٢ = س + ١ التي حصلنا عليها بتربيع المعادلة ص = $\sqrt{س + ١}$ تكافئ المعادلتين ص = ± $\sqrt{س + ١}$ ، والمنحني المبين في الشكل (٤ ـ ٧) هو منحني المعادلتين ص = ± $\sqrt{س + ١}$ ، حيث يمثل نصفه العلوي المعادلة ص = $\sqrt{س + ١}$ ، ويمثل نصفه السفلي المعادلة ص = − $\sqrt{س + ١}$، وحيث أن المعادلة المطلوب تمثيلها هي ص = $\sqrt{س + ١}$ ، فإننا نستبعد الجزء السفلي لنحصل على المنحني المبين في الشكل (٤ ـ ٨).



شكل (٤ ـ ٨)

ملاحظة (٤ ـ ٣)

قد يتطلب الموقف – عند رسم منحني المعادلة ـ إضافة نقط إلى ما هو في الجدول للحصول على مزيد من الدقة في الرسم. ومن المفيد في هذا المثال إضافة نقطة أخرى بين س = ٠ وَ س = − ١ حيث أن المنحني يتغير بشكل ملحوظ في هذه الفترة. عندما س = − $\frac{١}{٢}$ فإن ص = $\sqrt{\frac{١}{٢}} \approx ٠,٧$ وقد أضيفت هذه النقطة (− $\frac{١}{٢}$ ، ٠,٧) إلى الرسم البياني في الشكل (٤ ـ ٨).

تمــاريــن (٤ ـ ٢)

صنِّف المعادلات الجبرية التالية من حيث الدرجة :

١ ـ س − ص + ١ = ٠

٢ ـ ص + ٢ س − س^{٢} = ٧

٣ ـ س (ص + ٣) = ١

٤ ـ $\sqrt{\text{ص}}$ + ٢ − س = ٣

٥ ـ س (س − ص^{٢}) = ١

٦ ـ س + $\frac{١}{\text{ص}}$ = ١

حدد المعادلات الخطية من بين المعادلات التالية :

٧ ـ س = ١

٨ ـ ص = $\frac{١}{\text{س}}$

٩ ـ ص = (س − ١)^{٢}

١٠ ـ $\frac{١}{٢}$ (٧ س − ص) = ١

مثِّل كلاً من المعادلات التالية في التمارين (١١) − (١٨) بيانياً :

١١ ـ ص = س + ١

١٢ ـ ص = س^{٢} على الفترة ٤ ⩾ س ⩾ −٤

١٣ ـ ص = س^{٢} − ٥ على الفترة ٤ ⩾ س ⩾ −٤

١٤ ـ ص = −س^{٢} + ٥ على الفترة ٤ ⩾ س ⩾ −٤

١٥ ـ ص = (س + ٢)^{٢} على الفترة ٢ ⩾ س ⩾ −٦

١٦ ـ ص = $\frac{١}{\text{س}}$ على الفترة ٤ ⩾ س ⩾ $\frac{١}{٤}$

١٧ ـ ص = $\frac{١}{\text{س}}$ على الفترة − $\frac{١}{٤}$ ⩾ س ⩾ −٤

١٨ ـ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

١٩ ـ ارسم المنحنيات الثلاثة س^{٢} + ص^{٢} = ١ ، ص = $\sqrt{\text{١ − س}^{٢}}$،
ص = − $\sqrt{\text{١ − س}^{٢}}$ ، ثم قارن بينها.

٢٠ ـ أكمل الجدول التالي للمعادلة ص = س^{٢} + ٢ س − ٢

س	٠	−٤	٢				
ص				٠	−١	−٢	−٣

٢١ ـ حدد النقط التي حصلت عليها من إجابة السؤال السابق على المستوى الإحداثي، ثم صل بينهما للحصول على منحنى المعادلة ص = س^{٢} + ٢ س −٢ .

٤ ـ ٣ معادلة الخط المستقيم

في الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى

أ س + ب ص + جـ = ٠ (٤ ـ ١٨)

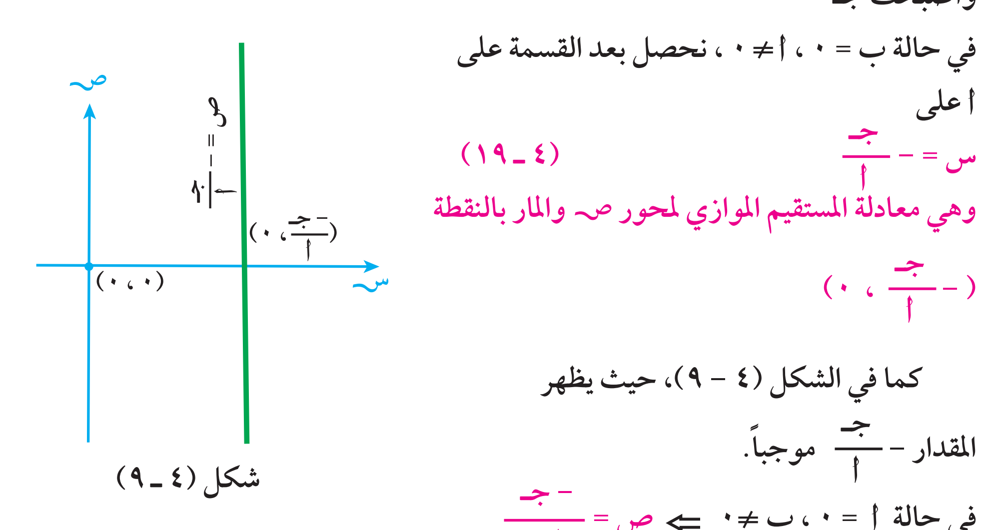
يفترض بطبيعة الحال أن أ وَ ب لا يساويان الصفر معاً، وإلاّ اختفت المتغيرات من المعادلة، وأصبحت جـ = ٠

في حالة ب = ٠ ، أ ≠ ٠ ، نحصل بعد القسمة على أ على

س = − $\frac{جـ}{أ}$ (٤ ـ ١٩)

وهي معادلة المستقيم الموازي لمحور ص والمار بالنقطة

(− $\frac{جـ}{أ}$ ، ٠)



شكل (٤ ـ ٩)

كما في الشكل (٤ − ٩)، حيث يظهر المقدار − $\frac{جـ}{أ}$ موجباً.

في حالة أ = ٠ ، ب ≠ ٠ ⇐ ص = $\frac{-جـ}{ب}$

وهي معادلة المستقيم الموازي للمحور س والمار بالنقط (٠ ، $\frac{-جـ}{ب}$)

معادلة المستقيم بدلالة الميل والجزء المقطوع من المحور ص

إذا كانت ب ≠ ٠ في المعادلة (٤ ـ ١٨) فإننا ، بعد قسمة طرفي المعادلة على ب ، نحصل على

$$ص = -\frac{أ}{ب} س - \frac{جـ}{ب}$$

$$ص = م س + د \qquad (٤ ـ ٢٠)$$

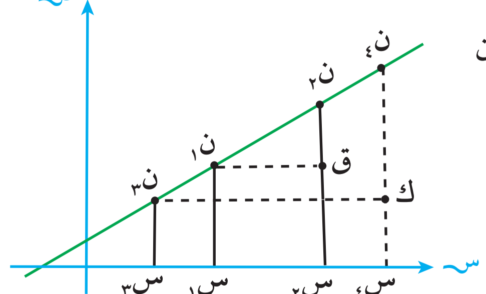
حيث د = $\frac{-جـ}{ب}$ هي قيمة ص عندما تكون س = ٠ ، وتسمى **د الجزء المقطوع من المحور ص**. أما المعامل م فإن دلالته تتضح من اختيار أي نقطتين $ن_١ (س_١ ، ص_١)$ وَ $ن_٢ (س_٢ ، ص_٢)$ على المستقيم بحيث $س_١ ≠ س_٢$، كما في الشكل (٤ ـ ١٠). بما أن هاتين النقطتين تقعان على المستقيم (٤ ـ ٢٠) فإن

$$ص_١ = م س_١ + د$$

$$ص_٢ = م س_٢ + د$$

$$\Leftarrow \quad ص_٢ - ص_١ = م (س_٢ - س_١)$$

$$\Leftarrow \quad م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$



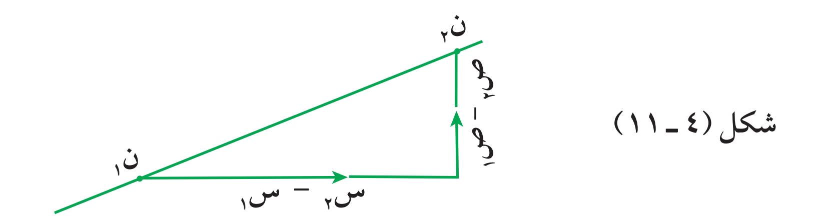
شكل (٤ ـ ١٠)

وهنا تجدر الإشارة إلى أن المقدار $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ يبقى ثابتاً مهما كان اختيارنا للنقطتين $ن_١ (س_١ ، ص_١)$ وَ $ن_٢ (س_٢ ، ص_٢)$ على المستقيم . فأي نقطتين أخريين $ن_٣ (س_٣ ، ص_٣)$ وَ $ن_٤ (س_٤ ، ص_٤)$ تحقق

$$\frac{ص_٤ - ص_٣}{س_٤ - س_٣} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

نتيجة تشابه المثلثين $ن_١ ن_٢ ق$ ، $ن_٣ ن_٤ ك$ في الشكل (٤ ـ ١٠)

لاحظ أن هذه النسبة تمثل تغير الإحداثي الصادي من النقطة $ن_١$ إلى $ن_٢$ بالمقارنة مع تغير الإحداثي السيني ، كما في الشكل (٤ ـ ١١).



شكل (٤ ـ ١١)

وهي بذلك مقياس للصعود (أو الانحدار) أثناء الانتقال من $ن_١$ إلى $ن_٢$ على المستقيم.
تسمى النسبة $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (س١ ، ص١) و (س٢ ، ص٢)، وبصفة عامة فإنه لأي نقطتين مختلفتين ن ، هـ على المستقيم ص = م س + د فإن الميل

$$م = \frac{ص_ن - ص_هـ}{س_ن - س_هـ} \quad (٤ ـ ٢١)$$

كما سبق أن تعلمت في المرحلة المتوسطة.

مثال (٤ ـ ١١)

أوجد ميل المستقيم الذي معادلته ٢ س + ٣ ص = ٦

الحـــل:

سنختار أي نقطتين ن ، هـ على المستقيم بحيث

$س_ن = ٠ \Leftarrow ٣ ص_ن = ٦$

$\Leftarrow ص_ن = ٢$

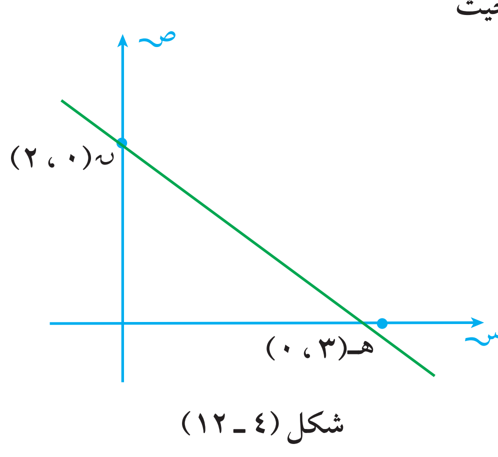
$س_هـ = ٣ \Leftarrow ٦ + ٣ ص_هـ = ٦$

$\Leftarrow ص_هـ = ٠$

فيكون الميل $م = \frac{ص_ن - ص_هـ}{س_ن - س_هـ}$

$= \frac{٢ - ٠}{٠ - ٣}$

$= - \frac{٢}{٣}$



شكل (٤ ـ ١٢)

لاحظ أن م = $\frac{ص_ن - ص_هـ}{س_ن - س_هـ} = \frac{ص_هـ - ص_ن}{س_هـ - س_ن} = \frac{٠ - ٢}{٣ - ٠} = - \frac{٢}{٣}$

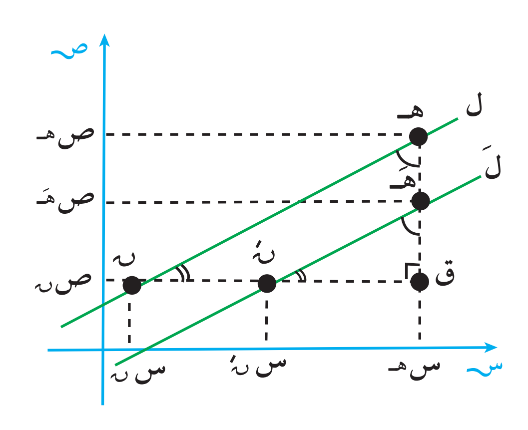
مما يعني أن تبديل النقطتين ن ، هـ في المعادلة (٤ ـ ٢١) لا يؤثر على الميل . انظر الشكل (٤ ـ ١٢).

نظرية (٤ ـ ٢)

إذا كانت معادلة المستقيم ل هي ص = م س + د ، ومعادلة المستقيم لَ هي ص = مَ س + دَ ،
فإن ل يوازي لَ إذا كان م = مَ ، أي أن ل ∥ لَ ⟺ م = مَ

البرهان : (غير مطلوب)

نرسم من النقطة ن على ل مستقيماً موازياً لمحور س ليقطع لَ في نَ كما في الشكل (٤ – ١٣) . ومن نقطة هـ على ل مستقيماً موازياً لمحور ص ليقطع لَ في هـَ ويلتقي مع المستقيم ن نَ في و (س هـ ، ص ن) بحيث ن ق̂ هـ = ٩٠° . من معلوماتك السابقة عن خواص التوازي والتشابه فإن



شكل (٤ ـ ١٣)

ل ∥ لَ ⟺ ن هـ̂ و = نَ هـَ̂ و ، هـ ن̂ و = هـَ نَ̂ و

⟺ △ ن هـ و يشابه △ نَ هـَ و

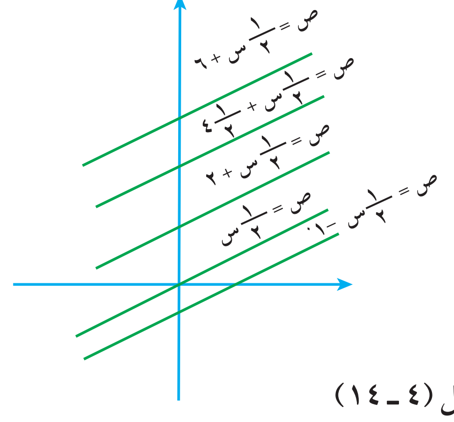
$$\Leftrightarrow \frac{|هـ\ و|}{|هـَ\ و|} = \frac{|ن\ و|}{|نَ\ و|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{ص_هـ - ص_ن}{ص_{هـَ} - ص_{نَ}} = \frac{س_هـ - س_ن}{س_{هـَ} - س_{نَ}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{ص}_{\text{هـ}} - \text{ص}_{\text{ب}}}{\text{س}_{\text{هـ}} - \text{س}_{\text{ب}}} = \frac{\text{ص}_{\text{هـ}'} - \text{ص}_{\text{ب}'}}{\text{س}_{\text{هـ}'} - \text{س}_{\text{ب}'}} \Leftrightarrow \text{م} = \text{مَ}$$

إن المعادلة ص = م س + د تمثل مستقيماً يمر بالنقطة (٠ ، د) بميل م كما أسلفنا ، وإذا سمحنا للعدد د بأن يأخذ قيماً مختلفة مع بقاء م ثابتة فإننا نحصل على مجموعة من المستقيمات المتساوية في الميل، أي المتوازية حسب النظرية (٤ ـ ٢)، كما هو موضح في الشكل (٤ ـ ١٤) ، حيث ثبتت م عند $\frac{١}{٢}$.

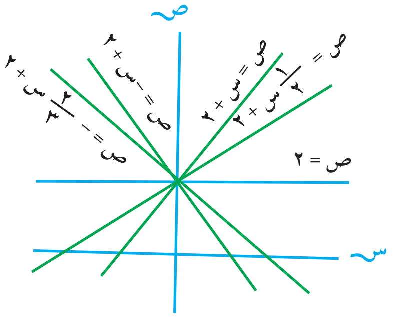
أما إذا ثبتنا قيمة د وسمحنا للميل م بأن يتغير فإننا نحصل على مجموعة من المستقيمات المتقاطعة في (٠ ، د) بميول مختلفة، كما هو مبين في الشكل (٤ ـ ١٥).



شكل (٤ ـ ١٤)

ولعل الشكل (٤ ـ ١٥) يوضح أيضاً الارتباط بين إشارة م واتجاه الانحدار على المستقيم، والتي يمكن تلخيصها فيما يلي :

١ ـ في حالة م = ٠ يكون المستقيم ص = د موازياً لمحور سـ ، وهذا يتفق مع قناعتنا بأن المستقيم الأفقي ميله صفر.

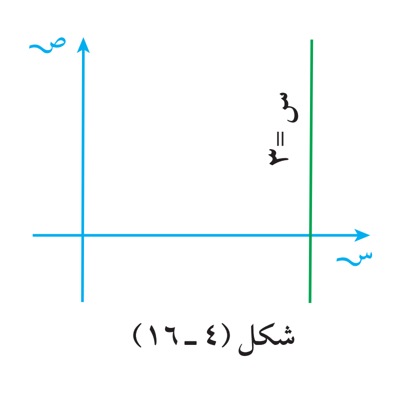


شكل (٤ ـ ١٥)

٢ ـ عندما تكون م > ٠ ، أي عندما يكون الميل موجباً ، فإن هذا يعني أن الزيادة في س يترتب عليها زيادة في ص فيصعد المستقيم في اتجاه اليمين. وفي الشكل (٤ ـ ١٥) مثالان على ذلك، هما المستقيمان ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢ ، ص = س + ٢.

٣ ـ وعلى العكس من ذلك فإن م < ٠ تعني أن الزيادة في س يترتب عليها نقص في ص، أي أن المستقيم يهبط في اتجاه اليمين ، كما يدل على ذلك المستقيمان ص = − س + ٢ ، ص = − $\frac{٢}{٣}$ س + ٢ في الشكل (٤ ـ ١٥).

٤ ـ أما الحالة الخاصة التي يكون فيها المستقيم موازياً لمحور ص ، مثل س = ٣ في الشكل (٤ ـ ١٦)، فهي حالة خاصة من المعادلة (٤ ـ ١٩) المذكورة في بداية هذا البند، وهي نتيجة أن ب = ٠ ، − $\frac{جـ}{أ}$ = ٣ في المعادلة العامة أ س + ب ص + جـ = ٠ وبما أن م = $\frac{-أ}{ب}$



شكل (٤ ـ ١٦)

غير معرَّف عندما ب = ٠ ، فإننا لا نستطيع التحدث عن ميل المستقيم الموازي لمحور ص لأنه غير معرَّف في هذه الحالة.

مما تقدم نستطيع أن نقول أن المعادلة الخطية بصورتها العامة (٤ ـ ١٨)

أ س + ب ص + جـ = ٠

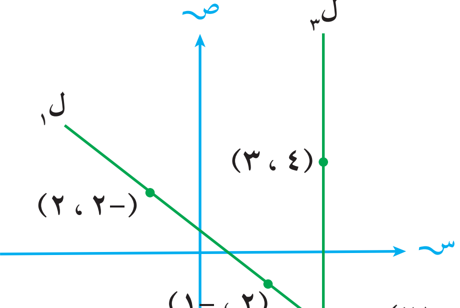
يمكن استخدامها لتمثيل المستقيم في جميع أوضاعه، وأن المعادلة (٤ ـ ٢٠)

ص = م س + د

يمكن استخدامها لتمثيل المستقيم في جميع الحالات ما عدا الحالة التي يكون فيها موازياً لمحور ص، فعندها نستخدم (٤ ـ ١٩).

مثال (٤ ـ ١٢)

أوجد ميل ومعادلة كل من المستقيمات $ل_١$، $ل_٢$، $ل_٣$، في الشكل (٤ ـ ١٧).



شكل (٤ ـ ١٧)

الحـــل :

١ ـ ميل المستقيم $ل_١$ نحصل عليه من المعادلة (٤ ـ ٢١)

$$م_١ = \frac{-١ \quad -٢}{٢ - (-٢)} = -\frac{٣}{٤}$$

فتكون معادلة $ل_١$

$$ص = -\frac{٣}{٤} س + د$$

وحيث إن النقطة (٢ ، −١) تقع على $ل_١$ فـإن

$$-١ = -\frac{٣}{٤}(٢) + د$$

$$\Leftarrow د = -١ + \frac{٣}{٢}$$

$$= \frac{١}{٢}$$

$$\Leftarrow ص = -\frac{٣}{٤} س + \frac{١}{٢}$$ هي المعادلة المطلوبة

٢ ـ بما أن المستقيم $ل_٢$ يوازي محور س فإن ميله $م_٢ = ٠$

فتكون معادلة $ل_٢$:

ص = د = عدداً ثابتاً.

وحيث إن $ل_٢$ يمر بالنقطة (−٢ ، −$\frac{١}{٢}$ ٢)فإن :

$ص = -\frac{١}{٢}٢$ هي المعادلة المطلوبة.

٣ ـ المستقيم $ل_٣$ يوازي محور ص ولذلك ليس له ميل، فتنطبق عليه المعادلة (٤ ـ ١٩) :

$$س = - \frac{جـ}{أ} = \text{عدداً ثابتاً}$$

وحيث إن $ل_٣$ يمر بالنقطة (٤ ، ٣) فإن :

س = ٤ هي المعادلة المطلوبة.

معادلة المستقيم بدلالة الميل ونقطة

مثال (٤ ـ ١٣)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) بميل −٣ .

الحـــلّ :

معادلة هذا المستقيم بدلالة الميل والجزء المقطوع من محور ص هي :

ص = م س + د

وحيث إن م = −٣ فإن :

ص =− ٣ س + د

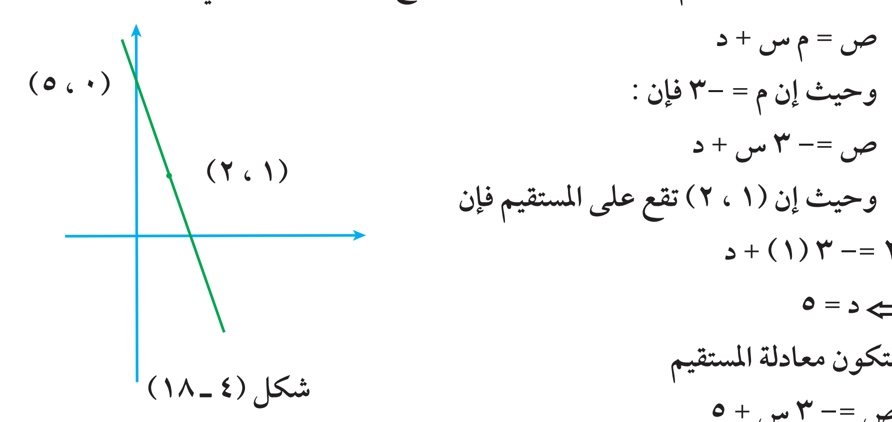
وحيث إن (١ ، ٢) تقع على المستقيم فإن

٢ =− ٣ (١) + د

⇐ د = ٥

فتكون معادلة المستقيم

ص =− ٣ س + ٥



شكل (٤ ـ ١٨)

وهي تمثل المستقيم المار بالنقطتين (١ ، ٢) وَ(٠ ، ٥) كما هو مبين في الشكل (٤ ـ ١٨).

مثال (٤ ـ ١٤)

أوجد معادلة المستقيم الذي ميله م ويمر بالنقطة ($س_١$ ، $ص_١$).

الحـــل :

في معادلة المستقيم (٤ ـ ٢٠) $ص = م س + د$

نعوض عن (س ، ص) بالنقطة $(س_١ ، ص_١)$ فنحصل على

$ص_١ = م س_١ + د$

وبطرح المعادلة الثانية من الأولى نحصل على المعادلة المكافئة

$$ص - ص_١ = م (س - س_١) \qquad (٤ ـ ٢٢)$$

وهي المعادلة المطلوبة للمستقيم بدلالة ميله ونقطة عليه.

ملاحظة (٤ ـ ٤)

بإمكاننا الآن الوصول إلى معادلة المستقيم المطلوبة في المثال (٤ ـ ١٣) بالتعويض في المعادلة (٤ ـ ٢٢) عن م وَ $(س_١ ، ص_١)$ بالقيم المعطاة في المثال، فنحصل على :

$ص - ٢ = (-٣) (س - ١)$

$\Leftarrow ص = -٣ س + ٥$

نتيجة (٤ ـ ١)

إذا كان المستقيم ل يمر بالنقطتين $(س_١ ، ص_١)$ وَ $(س_٢ ، ص_٢)$، حيث $س_١ \neq س_٢$، فإن

$$م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \quad \text{بتطبيق (٤ ـ ٢١)}$$

$$\Leftarrow ص - ص_١ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} (س - س_١) \quad \text{بالتعويض في (٤ ـ ٢٢)}$$

$$\Leftarrow \frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \qquad (٤ ـ ٢٣)$$

وهي معادلة المستقيم ل بدلالة النقطتين $(س_١ ، ص_١)$ وَ $(س_٢ ، ص_٢)$ الواقعتين عليه.

مثال (٤ ـ ١٥)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٢) وَ (-٢ ، ٦)

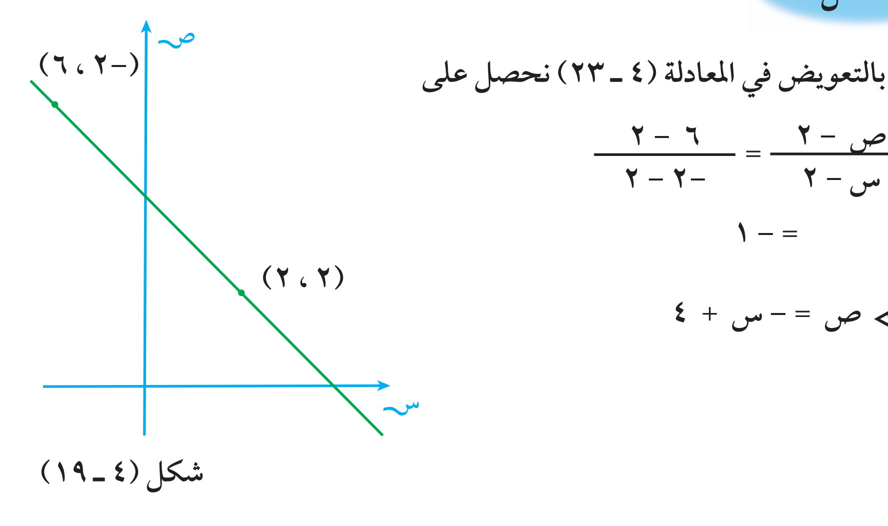
الحـــلّ :

بالتعويض في المعادلة (٤ ـ ٢٣) نحصل على

$$\frac{ص - ٢}{س - ٢} = \frac{٦ - ٢}{-٢ - ٢}$$

$$= -١$$

$$\Leftarrow ص = -س + ٤$$



شكل (٤ ـ ١٩)

ملاحظة (٤ – ٥)

في المثال (٤ – ١٢) نستطيع الآن الحصول على معادلة المستقيم $ل_١$ بالتعويض المباشر في المعادلة (٤ ـ ٢٣).

$$\frac{ص - (-١)}{س - ٢} = \frac{٢ - (-١)}{-٢ - ٢}$$

$$= -\frac{٣}{٤}$$

$$\Leftarrow ص = -\frac{٣}{٤}(س - ٢) - ١$$

$$= -\frac{٣}{٤} س + \frac{١}{٢}$$

بعض التطبيقات الهندسية

مثال (٤ ـ ١٦)

أوجد معادلة المستقيم الموازي للمستقيم $س - \frac{٢}{٣} ص = ٤$ والمار بالنقطة (١ ، -١).



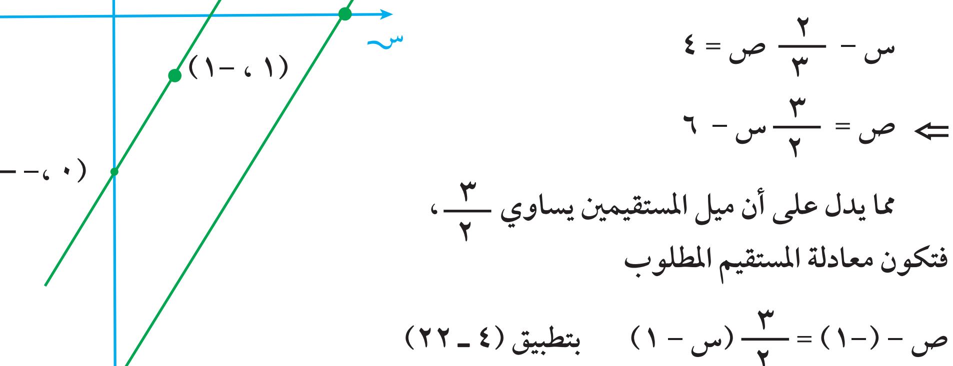
$$\text{س} - \frac{٢}{٣}\,\text{ص} = ٤$$

$$\Leftarrow \quad \text{ص} = \frac{٣}{٢}\,\text{س} - ٦$$

مما يدل على أن ميل المستقيمين يساوي $\frac{٣}{٢}$ ،
فتكون معادلة المستقيم المطلوب

$$\text{ص} - (-١) = \frac{٣}{٢}(\text{س} - ١) \qquad \text{بتطبيق (٤ ـ ٢٢)}$$

$$\Leftarrow \quad \text{ص} = \frac{٣}{٢}\,\text{س} - \frac{٥}{٢}$$



شكل (٤ ـ ٢٠)

مثال (٤ ـ ١٧)

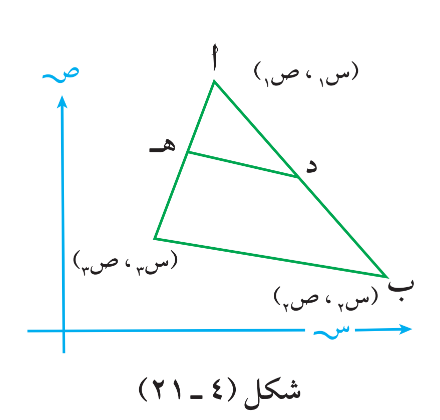
أثبت (مستخدماً مفاهيم الهندسة التحليلية) أن المستقيم الواصل بين منتصفي ضلعين في مثلث يوازي الضلع الثالث.

الحـــل :

نفرض أن رؤوس المثلث هي أ $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$، ب $(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢)$ ، جـ $(\text{س}_٣ ، \text{ص}_٣)$ كما في الشكل (٤ ـ ٢١) . ونفرض أن د منتصف الضلع [أ ب] ، هـ منتصف الضلع [أ جـ]. من قانون منتصف القطعة المستقيمة فإن إحداثيات النقطتين د ، هـ هي :

$$\text{د} = \left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$$

$$\text{هـ} = \left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٣}{٢} ، \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٣}{٢}\right)$$



شكل (٤ ـ ٢١)

⇐ ميل المستقيم د هـ =

$$\frac{\frac{1}{2}(ص_1 + ص_2) - \frac{1}{2}(ص_1 + ص_3)}{\frac{1}{2}(س_1 + س_2) - \frac{1}{2}(س_1 + س_3)}$$

$$= \frac{ص_2 - ص_3}{س_2 - س_3}$$ حيث $س_2 \neq س_3$

= ميل المستقيم ب جـ

⇐ د هـ // ب جـ　　　　من النظرية (٤ ـ ٢)

ملاحظة (٤ - ٦)

في حالة $س_2 = س_3$ فإن كلاً من د هـ ، ب جـ يكون موازياً لمحور صـ وبالتالي يكون د هـ // ب جـ

تدريب (٤ ـ ١)

في المثال (٤ - ١٧) أثبت أن $|د هـ| = \frac{1}{2} |ب جـ|$

تمـــاريـــــن (٤ ـ ٣)

في التمارين من (١) إلى (٩) احسب ميل المستقيم (إن وُجد) المار بالنقطتين المبينتين :

١ ـ (٢ ، ١)،(٤ ، ٤)

٢ ـ (−١ ، ٤)، (−٤ ، ١)

٣ ـ (٣ ، ٠) (٠ ، ٥)

٤ ـ (−٢ ، −٢) (−٢ ، ٥)

٥ ـ (٤ ، ٣)، (٧ ، ٣)

٦ ـ ($\frac{١}{٨}$ ، ٠)، ($\frac{١}{٤}$، −$\frac{١}{٢}$)

٧ ـ (٢ ، $ص_١$)، (٣ ، −١)

٨ ـ ($س_١$ ، $ص_١$)، (٢ ، ١)

٩ ـ ($س_١$ ، ٠)، (٠ ، $ص_١$)

في التمارين من (١٠) إلى (١٥) أوجد ميل المستقيم (إن وجد) من المعادلة المعطاة :

١٠ ـ ٣ س + ٤ ص = ٢٠

١١ ـ ٥ س + ٣ ص = ٩

١٢ ـ ٢ ص + ٧ = ٠

١٣ ـ س = ٥ − ص

١٤ ـ س + ١ = صفر

١٥ ـ $\frac{١}{٢}$ س + $\frac{٥}{٣}$ ص =−١

في التمارين من (١٦) إلى (٢٣) ضع كلاً من المعادلات الخطية في الصورة القياسية بدلالة الميل والجزء المقطوع من محور ص ، وارسم المستقيم الذي يمثل كلاً منها :

١٦ ـ ٢ س + ٣ ص = ٦

١٧ ـ ٢ (ص − س) =١

١٨ ـ $\frac{١}{٣}$ س + $\frac{٢}{٩}$ (ص − ١) = ٠

١٩ ـ $\frac{س − ٢}{٢}$ − $\frac{٥ ص}{٣}$ = ١

٢٠ ـ $\frac{١}{٥}$ س − $\frac{١}{٧}$ ص + ٢ = ٠

٢١ ـ ٢ ص + ٧ = ٧

٢٢ ـ $\frac{١}{٤}$ س − ١ = $\frac{٣ − ٢ص}{٥}$

٢٣ ـ ١٤ س + ١٠ ص = −١٣

في التمارين من (٢٤ إلى ٢٩) أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين ن بميل م في كل من الحالات التالية مع رسم المستقيم :

٢٤ ـ ن = (٣ ، ٢)، م = ١

٢٥ ـ ن = (−٢ ، ٤)، م =−$\frac{١}{٢}$

٢٦ ـ ن = (−٣ ، −٤)، م = ٢

٢٧ ـ ن = (٥ ، ٠)، م = −٤

٢٨ ـ ن = (١ ، −١)، م = ٠

٢٩ ـ ن = (٠ ، −٢)، م = −$\frac{٤}{٥}$

في التمارين من (٣٠) إلى (٣٣) ضع المعادلة الخطية أ س + ب ص + جـ = ٠ في الصورة التي تمثل :

٣٠ ـ مجموعة المستقيمات المتقاطعة في (٠ ، ٠)

٣١ ـ مجموعة المستقيمات المتقاطعة في (١ ، −١)

٣٢ ـ مجموعةالمستقيمات الموازية للمستقيم س + ص = ٠

٣٣ ـ مجموعة المستقيمات المتقاطعة في (١ ، −١) والموازية لمحور سـ .

استنتج معادلة المستقيم في كل من التمارين من (٣٤) إلى (٣٩)، علماً بأن أ = (١ ،٢) ب = (−١ ، ٠) ، جـ = (٢ ، −١)، مع رسم المستقيم في كل حالة :

٣٤ ـ أ ب　　٣٥ ـ أ جـ　　٣٦ ـ ب جـ　　٣٧ ـ أ د حيث د. منتصف القطعة [ب جـ]

٣٨ ـ ب هـ حيث هـ منتصف القطعة [أ جـ]

٣٩ ـ جـ و حيث و منتصف القطعة [أ ب]

٤٠ ـ حدد ك بحيث يمر المستقيم ك س + ٢ ص − ك + ٢ = ٠ بالنقطة (٢ ، −٣)

٤١ ـ حدد ك بحيث يكون ميل المستقيم ٦ س − ك ص + ٤ = ٠ مساوياً للعدد −٢

٤٢ ـ أثبت أن المعادلة $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ تمثل مستقيماً يقطع محور سـ عند (أ ، ٠) ومحور صـ عند (٠ ، ب).

ملاحظة : تسمى هذه المعادلة معادلة المستقيم بدلالة الجزء المقطوع من محور سـ والجزء المقطوع من محور صـ .

في التمارين من (٤٣) إلى (٤٦) أوجد معادلة المستقيم ل موضحاً إجابتك بالرسم :

٤٣ ـ ل يمر بالنقطة (−٢ ، ٥) بميل −٢

٤٤ ـ ل يوازي المستقيم س + ص = ١ ويقطع محورصـ في (٠ ، ٣)

٤٥ ـ ل يتقاطع مع المحاور الإحداثية في (−٣ ، ٠) ، (٠ ، ٥)

٤٦ ـ ل يوازي المستقيم ٢ س − ٣ ص = ٦ ويمر بالنقطة (٧ ، ٢).

٤ ـ ٤ نظام معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين

كل زوج مرتب (س ، ص) من الأعداد الحقيقية يحقق المعادلة

٣ س − ص = ١ (٤ ـ ٢٤)

يسمى حلاً لهذه المعادلة ، وحيث أن هناك عدداً غير منته من الأزواج المرتبة ، مثل (٠ ، −١) ، ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$) (١ ، ٢) ، (−١ ، −٤) ، ... إلخ ، كلها تحقق المعادلة (٤ ـ ٢٤) ، فإنه من الواضح أن مجموعة الحل للمعادلة (٤ ـ ٢٦) هي مجموعة النقط الواقعة على الخط المستقيم $ل_١$ المبين في الشكل (٤ ـ ٢٤)، وهي مجموعة غير منتهية.

ص
$ل_١$
(١ ، ٢)
($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)
س
(٠ ، −١)
(−١ ، −٤)

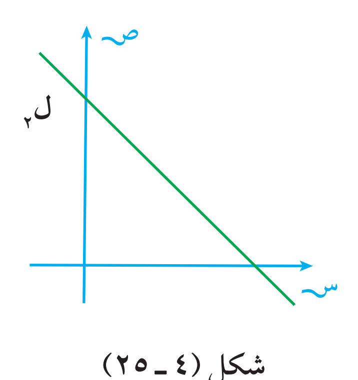
شكل (٤ ـ ٢٤)

كذلك المعادلة

س + ص = ٣ (٤ ـ ٢٥)

لها عدد غير منته من الحلول ممثلة بالنقط الواقعة على المستقيم $ل_٢$ المبين في الشكل (٤ ـ ٢٥).

أما إذا كان المطلوب إيجاد حل للمعادلتين (٤ ـ ٢٤) وَ (٤ ـ ٢٥) معاً، أي مجموعة الأزواج التي تحقق المعادلة (٤ ـ ٢٤) والمعادلة (٤ ـ ٢٥) في آن واحد، فإنه من الواضح أننا نبحث عن نقط تقاطع المستقيم $ل_١$ مع المستقيم $ل_٢$ ، أي النقطة

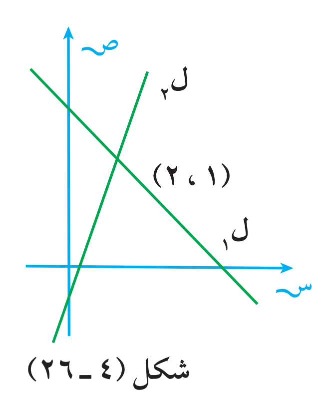


شكل (٤ ـ ٢٥)

(١ ، ٢) . كما في الشكل (٤ ـ ٢٦). نقول في هذه الحالة إن النظام المكون من المعادلتين

٣ س −ص = ١   (٤ ـ ٢٤)

س + ص = ٣   (٤ ـ ٢٥)



شكل (٤ ـ ٢٦)

له حل واحد هو (١ ، ٢) ، أي أن س = ١ ، ص = ٢. وقد حصلنا على هذه النتيجة من الرسم البياني، وكان بإمكاننا الحصول عليها بالطرق الجبرية التي تعلمتها في المرحلة المتوسطة والتي تعتمد على التخلص من أحد المتغيرين للحصول على معادلة مكافئة بمتغير واحد، وفيما يلي نقدم أولاً طريقة الحذف، ثم تليها طريقة التعويض في حل الأنظمة الخطية.

الحل بطريقة الحذف

١ ـ بجمع معادلتين (٤ ـ ٢٤) وَ (٤ ـ ٢٥) نحصل على معادلة

(٣ س −ص) + (س + ص) = ١ + ٣

⟺ ٤ س = ٤

⟺ س = ١

٢ ـ بضرب المعادلة (٤ ـ ٢٥) في −٣، ثم إضافتها إلى (٤ ـ ٢٤) نحصل على

(−٣) (س + ص) + (٣س − ص) = (−٣) (٣) + ١

⟺ − ٤ ص =−٨

⟺ ص = ٢

فيكون حل النظام المكون من المعادلتين (٤ ـ ٢٤) وَ (٤ ـ ٢٥) هو (١ ، ٢) ، وهذا يتفق مع النتيجة السابقة التي توصلنا إليها بإيجاد نقطة تقاطع المستقيمين $ل_١$ وَ$ل_٢$.

وسوف نعتمد على الأسلوب الجبري في إيجاد حلول الأنظمة الخطية من نوع (٤ ـ ٢٤) وَ (٤ ـ ٢٥) لأنه أسرع وأكثر دقة. لاحظ أننا تخلصنا من المتغير ص في الخطوة الأولى للحصول على قيمة س، ثم تخلصنا من س في الخطوة الثانية للحصول على قيمة ص.

بصورة عامة إذا كان لدينا نظام مكون من معادلتين من الدرجة الأولى في المتغيرين س ، ص

$$\begin{cases} أ_١ س + ب_١ ص = جـ_١ \\ أ_٢ س + ب_٢ ص = جـ_٢ \end{cases} \qquad (٤ ـ ٢٦)$$

فإن حل هذا النظام بطريقة الحذف تكون باتباع الخطوات التالية :

١ ـ نتخلص من ص بضرب المعادلة الأولى في $ب_٢$ والثانية في $(-ب_١)$ ثم جمعهما $ب_٢ (أ_١ س + ب_١ ص) - ب_١ (أ_٢ س + ب_٢ ص) = ب_٢ جـ_١ - ب_١ جـ_٢$

$(أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١) س = ب_٢ جـ_١ - ب_١ جـ_٢$

في حالة $أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١ \neq ٠$ نستطيع القسمة على هذا المقدار للحصول على قيمة

$$س = \frac{ب_٢ جـ_١ - ب_١ جـ_٢}{أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١} \qquad (٤ ـ ٢٧)$$

أما الحالة $أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١ = ٠$ فسوف نعالجها في النظرية (٤ ـ ٣) اللاحقة.

٢ ـ نتخلص من س بضرب المعادلة الأولى في $(-أ_٢)$ والثانية في $أ_١$ ثم جمعهما $-أ_٢ (أ_١ س + ب_١ ص) + أ_١ (أ_٢ س + ب_٢ ص) = - أ_٢ جـ_١ + أ_١ جـ_٢$

$(أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١) ص = أ_١ جـ_٢ - أ_٢ جـ_١$

$$ص = \frac{أ_١ جـ_٢ - أ_٢ جـ_١}{أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١} \qquad (٤ ـ ٢٨)$$

والمعادلتان (٤ ـ ٢٧) ، (٤ ـ ٢٨) تكافئان النظام (٤ ـ ٢٦) لأن عمليات الضرب والجمع المشار إليها أعلاه ينتج عنها معادلات جديدة مكافئة للمعادلات الأصلية. فنستنتج أن حل النظام (٤ ـ ٢٦) هو :

$$\left(\frac{ب_٢ جـ_١ - ب_١ جـ_٢}{أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١} ، \frac{أ_١ جـ_٢ - أ_٢ جـ_١}{أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١} \right)$$

بشرط أن $أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١ \neq ٠$

ملاحظة (٤ ـ ٧)

يكتب المقدار $أ_١ ب_٢ - أ_٢ ب_١$ أحياناً بالشكل $\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix}$

ويسمى محددة من الدرجة الثانية، صفها الأول $أ_١ ب_١$، وصفها الثاني $أ_٢ ب_٢$، وعمودها

الأول $\begin{matrix} أ_1 \\ أ_2 \end{matrix}$ وعمودها الثاني $\begin{matrix} ب_1 \\ ب_2 \end{matrix}$ ، وقطرها الرئيسي مكون من العنصرين $أ_1$ ، $ب_2$ وقطرها الآخر مكون من $ب_1$ ، $أ_2$. فتكون قيمة المحددة $\begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix} = أ_1 ب_2 - ب_1 أ_2$

= (حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي) - (حاصل ضرب عنصري القطر الآخر)

وبالتالي يصبح حل النظام (٤ ـ ٢٦) الذي توصلنا إليه في (٤ ـ ٢٧) وَ (٤ ـ ٢٨) بالشكل

$$س = \begin{vmatrix} جـ_1 & ب_1 \\ جـ_2 & ب_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix} \qquad (٤ـ٢٩)$$

$$ص = \begin{vmatrix} أ_1 & جـ_1 \\ أ_2 & جـ_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix} \qquad (٤ـ٣٠)$$

الحل بطريقة التعويض

لإيجاد حل المعادلتين (٤ ـ ٢٤) ، (٤ ـ ٢٥) الآنفتي الذكر

٣ س – ص = ١

س + ص = ٣

بالتعويض نتبع الخطوات التالية :

١ ـ نختار إحدى المعادلتين، ولتكن الأولى، ومنها نعبر عن أحد المتغيرين، وليكن ص، بدلالة المتغير الآخر فنحصل على ص = ٣ س –١

٢ ـ نعوض عن ص في المعادلة الثانية للحصول على معادلة من الدرجة الأولى في س ونوجد حلها س + (٣ س – ١) = ٣

٤ س = ٤

س = ١

٣ ـ نعوض عن قيمة س التي حصلنا عليها من الخطوة الثانية في المعادلة التي توصلنا إليها في الخطوة الأولى

ص = ٣ (١) −١

= ٢

فيكون الحل (١ ، ٢) هو الذي توصلنا إليه في بداية هذا البند.

وبتطبيق هذه الطريقة، أي طريقة التعويض، على النظام (٤ ـ ٢٦) فإننا نحصل على النتيجة (٤ ـ ٢٩) وَ (٤ ـ ٣٠) التي سبق أن توصلنا إليها بطريقة الحذف، وسنترك تفاصيل التحقق من ذلك للطالب.

مثال (٤ ـ ١٩)

أوجد حل النظام المكون من المعادلتين

س − ص = ١

س + ٢ ص = ٠

الحـــلّ :

باستخدام (٤ ـ ٢٧) نحصل على

$$س = \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

= [(١)(٢) − (١−)(٠)] ÷ [(١)(٢) − (١−)(١)]

$$= \frac{٢}{٣}$$

وباستخدام (٤ ـ ٢٨) نحصل على

$$ص = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

= (−١) ÷ (٢ + ١)

= − $\frac{١}{٣}$

فتكون مجموعة الحل هي $\left\{ \frac{٢}{٣} ، -\frac{١}{٣} \right\}$

وهي نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين للمعادلتين.

كما في الشكل (٤ ـ ٢٧).

شكل (٤ ـ ٢٧)

تدريب (٤ـ ٥)

تحقق من صحة هذا الجواب بالتعويض في المعادلتين.

حالتا الانطباق والتوازي

مثال (٤ ـ ٢٠)

أوجد حل النظام س − ص = ٢

٣ س − ٣ ص = ٦

الحــــلّ :

لاحظ هنا أن

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - (-3) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \text{جـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{جـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -6 - (-6) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{جـ}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

وبالتالي لا نستطيع أن نطبق (٤ ـ ٢٧)، (٤ ـ ٢٨) لأنه لا تجوز القسمة على الصفر. ولكن الملاحظ أيضاً في هذا النظام أن المعادلة الثانية نحصل عليها بضرب المعادلة الأولى في ٣، أي أن المعادلة الثانية مستنتجة من الأولى فهي تكافئها ولهما بالتالي مجموعة الحل نفسها. والشكل (٤ ـ ٢٨) يوضح أن المعادلتين يمثلهما مستقيم واحد، أو ـ بعبارة أخرى ـ أن المستقيمين الممثلين لهذا النظام منطبقان. فتكون مجموعة الحل هي (س ، س − ٢) لكل س ∋ ع، وهي مجموعة غير منتهية تمثلها نقط المستقيم المبين في الشكل (٤ ـ ٢٨).

شكل (٤ ـ ٢٨)

مثال (٤ ـ ٢١)

أوجد حل للنظام س − ص = ٢

٣ س ـ ٣ ص = ٠

الحـــلّ :

$$\begin{vmatrix} أ_١ & ب_١ \\ أ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & -٣ \end{vmatrix} = ٠$$

$$\begin{vmatrix} جـ_١ & ب_١ \\ جـ_٢ & ب_٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٠ & -٣ \end{vmatrix} = -٦$$

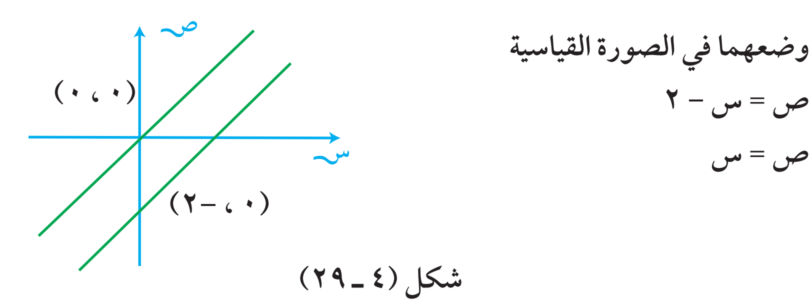
$$\begin{vmatrix} أ_١ & جـ_١ \\ أ_٢ & جـ_٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٠ \end{vmatrix} = -٦$$

ومرة أخرى لا نستطيع تطبيق (٤ ـ ٢٧) ، (٤ ـ ٢٨)،
ولكن نلاحظ هنا أن المعادلتين بعد

وضعهما في الصورة القياسية

ص = س − ٢

ص = س



شكل (٤ ـ ٢٩)

يمثلان مستقيمين متساويين في الميل ومختلفين في قيمتي الجزء المقطوع من محور ص ، مما يدل على أن المستقيمين متوازيان ، وحيث أن مثل هذين المستقيمين لا يتقاطعان، فإنه لا يوجد حل للنظام المعطى.

إذا استخدمنا طريقة التعويض لإيجاد حل النظام الوارد في المثال (٤ ـ ٢٠) فإننا نحصل على

ص = س − ٢ من المعادلة الأولى

٣ س − ٣ (س − ٢) = ٦ بالتعويض في المعادلة الثانية

⟸ (٣ ـ ٣) س = ٦ − ٦ أو ٠ × س = ٠

وبذلك تتحقق المعادلة الثانية مهما كانت س .

أما النظام الوارد في المثال (٤ ـ ٢١) فيعطينا

ص = س − ٢ من المعادلة الأولى

٣ س − ٣ (س − ٢) = ٠ بالتعويض في المعادلة الثانية

⟸ (٣ − ٣) س = ٦ أو ٠ × س = ٦

وبذلك لا تتحقق المعادلة الثانية مهما كانت س، أو بعبارة أخرى تكون مجموعة الحل في هذه الحالة المجموعة الخالية $\emptyset$.

الصيغة العامة لحل الأنظمة الخطية

لنعد الآن إلى النظام (٤ ـ ٢٦) ونسجل ما توصلنا إليه من نتائج في النظرية التالية :

نظرية (٤ ـ ٣)

في نظام المعادلتين من الدرجة الأولى في س وَ ص

$$أ_١ س + ب_١ ص = جـ_١ \qquad أ_٢ س + ب_٢ ص = جـ_٢ \qquad (٤ ـ ٢٦)$$

(١) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \neq ٠$

فإن النظام (٤ ـ ٢٦) له حل واحد هو

$$\text{س} = \begin{vmatrix} \text{جـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{جـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \text{ ،}$$

$$\text{ص} = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{جـ}_2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix}$$

(٢) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{جـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{جـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{جـ}_2 \end{vmatrix} = ٠$

فإن النظام له عدد غير منته من الحلول.

(٣) إذا كان $\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} = ٠$

ولكن $\begin{vmatrix} \text{جـ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{جـ}_2 & \text{ب}_2 \end{vmatrix} \neq ٠$ ، $\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{جـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{جـ}_2 \end{vmatrix} \neq ٠$ ،

فإن النظام لا يكون له حل.

البـــرهـان

إذا ضربنا المعادلة الأولى في النظام (٤ ـ ٢٦) في ب_2 والثانية في $(-\text{ب}_1)$ ثم جمعناهما فإننا نحصل على المعادلة

$(أ_1 ب_2 - ب_1 أ_2)$ س $= جـ_1 ب_2 - ب_1 جـ_2$ (٤ ـ ٢٩)

وإذا ضربنا المعادلة الأولى في $(-أ_2)$ والثانية في $أ_1$ وجمعناهما فإننا نحصل على المعادلة

$(أ_1 ب_2 - ب_1 أ_2)$ص $= أ_1 جـ_2 - جـ_1 أ_2$ (٤ ـ ٣٠).

والمعادلتان (٤ ـ ٢٩) ، (٤ ـ ٣٠) تكافئان النظام (٤ ـ ٢٦).

١ ـ في حالة $أ_1 ب_2 - ب_1 أ_2 \neq ٠$ يمكن القسمة على هذا المقدار للحصول على الحل (٤ ـ ٢٧) ، (٤ ـ ٢٨) الذي يتفق مع نص النظرية.

٢ ـ في حالة $أ_1 ب_2 - ب_1 أ_2 = جـ_1 ب_2 - ب_1 جـ_2 = أ_1 جـ_2 - جـ_1 أ_2 = ٠$ تصبح المعادلة (٤ ـ ٢٩) صحيحة لكل قيم س الحقيقية لأن كلاً من طرفيها يساوي الصفر. كما أن المعادلة (٤ ـ ٣٠) تكون صحيحة لجميع قيم ص الحقيقية للسبب نفسه.

٣ ـ في حالة $أ_1 ب_2 - ب_1 أ_2 = ٠$ ، $جـ_1 ب_2 - ب_1 جـ_2 \neq ٠$ لاتكون المعادلة (٤ ـ ٢٩) صحيحة مهما كانت س لأن طرفها الأيمن يساوي الصفر لجميع قيم س الحقيقية بينما طرفها الأيسر لا يساوي الصفر. وكذلك الحال بالنسبة للمعادلة (٤ ـ ٣٠).

التفسير الهندسي

إن التفسير الهندسي للنظرية (٤ ـ ٣) يمكن توضيحه بسهولة عندما تكون $ب_1 \neq ٠$ ، $ب_2 \neq ٠$ إذ يمكننا عندئذ وضع النظام (٤ ـ ٢٦) في الصورة القياسية

$$ص = \frac{-أ_1}{ب_1} س + \frac{جـ_1}{ب_1} = م_1 س + د_1$$

$$ص = \frac{-أ_2}{ب_2} س + \frac{جـ_2}{ب_2} = م_2 س + د_2$$

حيث $م_1 = \frac{-أ_1}{ب_1}$ ، $م_2 = -\frac{أ_2}{ب_2}$ ، $د_1 = \frac{جـ_1}{ب_1}$ ، $د_2 = \frac{جـ_2}{ب_2}$

١ ـ عندما $أ_1 ب_2 - ب_1 أ_2 \neq ٠$ فإن القسمة على $ب_1 ب_2 \neq ٠$ تعطي

$$\frac{أ_1}{ب_1} - \frac{أ_2}{ب_2} \neq ٠$$

$$\Leftarrow م_1 \neq م_2$$

مما يعني أن المستقيم $ل_١$ الذي يمثل المعادلة الأولى يتقاطع مع المستقيم $ل_٢$ الذي يمثل المعادلة الثانية إذا اختلف ميلاهما.

٢ ـ عندما $أ_١ ب_٢ - ب_١ أ_٢ = ٠$ ، $جـ_١ ب_٢ - ب_١ جـ_٢ = ٠$ فإن القسمة على $ب_١ ب_٢$ تعطي

$$\frac{أ_١}{ب_١} = \frac{أ_٢}{ب_٢} \quad ، \quad \frac{جـ_١}{ب_١} = \frac{جـ_٢}{ب_٢}$$

$\Leftarrow$ $م_١ = م_٢$ ، $د_١ = د_٢$

$\Leftarrow$ المستقيم $ل_١$ ينطبق على المستقيم $ل_٢$.

٣ ـ عندما $أ_١ ب_٢ - ب_١ أ_٢ = ٠$ ، $جـ_١ ب_٢ - ب_١ جـ_٢ \neq ٠$ فإن

$م_١ = م_٢$ ، $د_١ \neq د_٢$ بالقسمة على $ب_١ ب_٢ \neq ٠$

$\Leftarrow$ المستقيم $ل_١$ يوازي المستقيم $ل_٢$.

مسائل تطبيقية

كثيراً ما تستخدم المعادلات الخطية في متغيرين لحل مسائل من الحياة اليومية، وذلك بالرمز للكميات المطلوب إيجادها بالمتغيرين س ، ص ثم ترجمة المسألة إلى معادلتين واتباع الأساليب الموضحة آنفاً لإيجاد الحل.

مثال (٤ ـ ٢٢)

إذا كان الفرق بين عمري أخوين ثلاث سنوات، ويقل عمر الأكبر عن مثلي عمر الأصغر بعشر سنوات، فما عمر كل من الأخوين؟

الحـــلّ :

نفرض أن س = عمر الأخ الأكبر

ص = عمر الأخ الأصغر

فنستنتج من المعطيات أن

س = ص + ٣

٢ ص = س + ١٠

وبتعويض قيمة س من المعادلة الأولى في الثانية نحصل على

٢ ص = (ص + ٣) + ١٠

ص = ١٣

س = ١٣ + ٣ = ١٦

فيكون عمرا الأخوين ١٦ وَ ١٣ سنة.

مثال (٤ ـ ٢٣)

إذا كانت ٣ كلغ من البرتقال وَ ٢ كلغ من التفاح تكلف ٢٢ ريالاً، بينما ٥ كلغ من البرتقال و٣ كلغ من التفاح تكلف ٣٥ ريالاً، فما قيمة الكيلوغرام من كل منهما؟

الحـــلّ :

نفرض أن س = قيمة ١ كلغ من البرتقال

ص = قيمة ١ كلغ من التفاح

نحصل على

٣ س + ٢ ص = ٢٢

٥ س + ٣ ص = ٣٥

وبتطبيق القاعدتين (٤ ـ ٢٩) وَ(٤ ـ ٣٠) نحصل على

$$س = \begin{vmatrix} ٢٢ & ٢ \\ ٣٥ & ٣ \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$$

= (٦٦ − ٧٠) ÷ (٩ − ١٠)

= ٤

$$ص = \begin{vmatrix} ٣ & ٢٢ \\ ٥ & ٣٥ \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= (-٥) \div (-١)$$

$$= ٥$$

فتكون قيمة كيلوغرام البرتقال ٤ ريالات وقيمة كيلوغرام التفاح ٥ ريالات.

التعامد

عندما يتقاطع مستقيمان في نقطة واحدة فإننا نتوقع أن تكون هناك علاقة بين ميلي المستقيمين وزاوية التقاطع ، والنظرية التالية توضح هذه العلاقة في الحالة الخاصة التي يتقاطع فيها المستقيمان بزاوية قائمة.

نظرية (٤ ـ ٤)

إذا كان المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$ يمثلان المعادلتين

$ص = م_١ س + د_١$

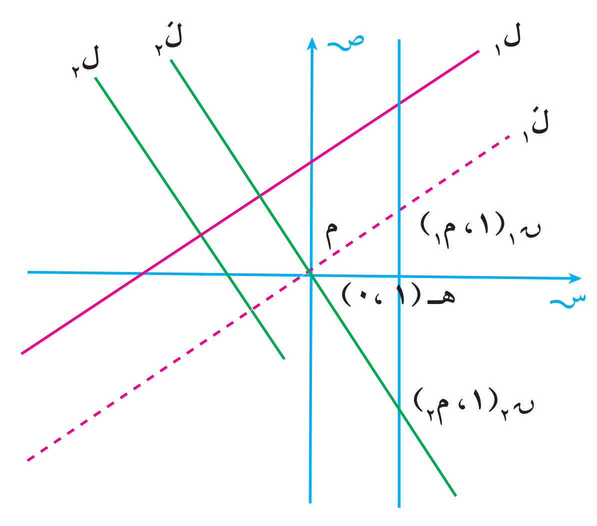
$ص = م_٢ س + د_٢$

على الترتيب ، فإن $ل_١ \perp ل_٢ \Leftrightarrow م_١ م_٢ = -١$

البرهان

لنفرض أن $ل'_١$ هو المستقيم الذي معادلته $ص = م_١ س$ وأن $ل'_٢$ هو المستقيم الذي معادلته $ص = م_٢ س$

فنستنتج من نظرية (٤ ـ ٢) أن $ل'_١ \parallel ل_١$ وأن $ل'_٢ \parallel ل_٢$ ، كما أن $ل'_٢$ ، $ل'_١$ يتقاطعان في نقطة الأصل م كما في الشكل (٤ – ٣٠).



شكل (٤ ـ ٣٠)

من النقطة هـ (١ ، ٠) نرسم مستقيماً موازياً لمحور ص فيقطع $\text{لَ}_{١}$ في $\text{ن}_{١}$ (١، $\text{م}_{١}$) ويقطع $\text{لَ}_{٢}$ في $\text{ن}_{١}$ (١ ، $\text{م}_{٢}$). ومن نظرية فيثاغورس

$|\text{م ن}_{١}|^{٢} = \text{م}_{١}^{٢} + ١$ في المثلث القائم م هـ $\text{ن}_{١}$

$|\text{م ن}_{٢}|^{٢} = \text{م}_{٢}^{٢} + ١$ في المثلث القائم م هـ $\text{ن}_{٢}$

ومن قانون المسافة بين نقطتين فإن

$$|\text{ن}_{١}\ \text{ن}_{٢}|^{٢} = (\text{م}_{١} - \text{م}_{٢})^{٢}$$

$$= \text{م}_{١}^{٢} - ٢\text{م}_{١}\ \text{م}_{٢} + \text{م}_{٢}^{٢}$$

فنستنتج من نظرية فيثاغورس أنه في المثلث $\text{ن}_{١}\ \text{ن}_{٢}$ م يكون

$$\text{ن}_{١}\ \hat{\text{م}}\ \text{ن}_{٢} = ٩٠^{\circ} \Leftrightarrow |\text{ن}_{١}\ \text{ن}_{٢}|^{٢} = |\text{م ن}_{١}|^{٢} + |\text{م ن}_{٢}|^{٢}$$

$$\Leftrightarrow \text{م}_{١}^{٢} - ٢\ \text{م}_{١}\ \text{م}_{٢} + \text{م}_{٢}^{٢} = \text{م}_{١}^{٢} + ٢ + \text{م}_{٢}^{٢}$$

$$\Leftrightarrow \text{م}_{١}\ \text{م}_{٢} = -١$$

مثال (٤ ـ ٢٤)

أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم ٣ س − ٥ ص = ٢ والمار بالنقطة (١ ، ١).

الحـــل :

بعد وضع المعادلة المعطاة في الصورة القياسية

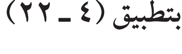
$$\text{ص} = \frac{3}{5}\,\text{س} - \frac{2}{5}$$

نستنتج أن ميل المستقيم الذي يمثلها $\text{م}_1 = \frac{3}{5}$ ، ومن النظرية (٤ ـ ٤) يكون ميل المستقيم العمودي عليه

$$\text{م}_2 = -\frac{1}{\text{م}_1} = -\frac{5}{3}$$

فتكون معادلة المستقيم المطلوب

$$\text{ص} - 1 = -\frac{5}{3}(\text{س} - 1)$$



بتطبيق (٤ ـ ٢٢)

أو $5\,\text{س} + 3\,\text{ص} = 8$

بعد نقطة عن مستقيم

نُعَرِّف بعد النقطة ں عن المستقيم ل الذي لا يمر بها بأنه طول العمود النازل من ں على ل ، أي طول القطعة [ں هـ] في الشكل (٤ ـ ٣١)

وفي حالة ں $\in$ ل يُعَرَّف بعد ں عن ل بأنه صفر.

شكل (٤ ـ ٣١)

ويمكننا إيجاد بعد النقطة ں $(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ عن المستقيم ل ($\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ص} + \text{جـ} = 0$)

من العلاقة :

$$\frac{|\,\text{أ}\,\text{س}_1 + \text{ب}\,\text{ص}_1 + \text{جـ}\,|}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}}$$

مثال (٤ ـ ٢٥)

أوجد بعد النقطة $(3 ، \frac{9}{2})$ عن

عن المستقيم $\text{س} + 2\,\text{ص} = 2$

الحـــل :

معادلة المستقيم هي : س + ٢ ص − ٢ = ٠ حيث أ = ١

ب = ٢ جـ = −٢

من العلاقة أعلاه نجد أن البعد بين (٣ ، $\frac{٩}{٢}$) والمستقيم هو :

$$\frac{|٣ + ٩ - ٢|}{\sqrt{٥}} = \frac{١٠}{\sqrt{٥}} = ٢\sqrt{٥}$$

مثال (٤ـ٢٦)

أوجد بعد النقطة (٠ ، ٠) عن المستقيم ٤ س − ٢ ص = ٣

الحـــل :

بعد وضع معادلة المستقيم في الصورة

أ س + ب ص + جـ = ٠

نجد أن أ = ٤ ، ب = −٢ ، جـ = −٣ فنستنتج من تطبيق العلاقة أن

بعد (٠ ، ٠) عن المستقيم = $\frac{|-٣|}{\sqrt{(٤)^٢ + (-٢)^٢}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٥}} = \frac{٣\sqrt{٥}}{١٠}$

تمارين (٤ ـ ٤)

في التمارين من (١) إلى (٨) أوجد مجموعة الحل لكل نظام بطريقة التعويض، ثم تحقق من صحة إجابتك بالرسم البياني:

(١) س + ٧ ص = ١
س − ص = ٥

(٢) ص = ٢ س + ١
٢ ص = ٤ س + ٢

(٣) س + ٢ ص = ٠
ص = −٢

(٤) س + ٢ ص = ١
س − ٢ ص = ١

(٥) ١٠ س − ٣ ص = ٤
س − $\frac{٥}{٢}$ ص = ٣

(٦) س + ص = ١
٢ س + ٢ ص = ٠

(٧) س − ص = ٢
س + ص = $\frac{٤}{٥}$

(٨) س + ٤ ص = ٠
ص + ٤ س = ٠

في التمارين من (٩) إلى (١٨) أوجد الحل بطريقة الحذف :

(٩) س + ص = ٣
س − ص = ١

(١٠) ٣ س + ٢ ص = ١
٢ س − ص = ١

(١١) ٣ س − ص = ٤
٢ س + ٢ص = ٢٤

(١٢) ٤ س − ص = ١٣
٢ س + ٤ ص = ٢

(١٣) −٢ س − ٤ ص = ١
٢ س + ٤ ص = −١

(١٤) ٣ س + ٢ ص = ١
−٣ س − ٢ ص = ٠

(١٥) − س − ٨ ص = ٣
− ٢ س + ص = −١١

(١٦) − س + ١٠ ص = ٣
− ٥ س + ١١ ص = −٢٤

(١٧) −٥ س + ٢ ص = −٦
١٠ س + ٧ ص = ٣٤

(١٨) $\frac{١}{٢}$ س − ص = ١
س + $\frac{١}{٣}$ ص = $\frac{٧}{٢}$

في التمارين من (١٩) إلى (٢٨) أوجد الحل باستخدام قانون المحددات :

(١٩) ٥ س – ٨ ص = ٧
٢س – ص = ٥

(٢٠) ٣ س + ٤ ص = ١٠
٨ س – ص = ١٥

(٢١) ٧ س – ص = ٢٤
س –٢ ص = ٩

(٢٢) ٣ س + ص = –٨
س – ٦ ص = ٣

(٢٣) – ٣ س + ٢ ص = ٦
٣س – ص = ٠

(٢٤) ٢ س – ص = ١٢
٣ س + ٢ ص = ١١

(٢٥) ص = ٢ + ٤ س
٢ س = ص – ٤

(٢٦) س – ص – ٨ = ٠
س + ٣ ص + ٤٨ = ٠

(٢٧) ص – ٣ س + ٢ = ٠
٢س + ص + ١٧ = ٠

(٢٨) ٢ س – ص = ٥
–٤س + ٢ ص = –١٠

(٢٩) إذا كان مجموع عددين يساوي ٢٠ وأحدهما يزيد بمقدار ٢ عن خمسة أمثال العدد الآخر، فما هما العددان ؟

(٣٠) لدى محمد ١٧ ريالاً جميعها من فئة الريال الواحد ونصف الريال. إذا كان لديه ٢١ قطعة نقدية ، فكم عدد كل فئة ؟

(٣١) يخلط بقال نوعين من البن أحدهما يبيعه بسعر ٢٠ ريالاً للكيلوغرام والآخر بسعر ٣٠ ريالاً للكيلو غرام، ويبيع الخليط بسعر ٢٤ ريالاً للكيلو غرام ، فكم ينبغي له أن يخلط من كل صنف للحصول على ٦٠ كلغ من الخليط بحيث يحصل على ثمن البيع نفسه ؟

(٣٢) كانت أسعار الدخول لمباراة كرة القدم ٥ ريالات للدرجة الأولى و ٣ ريالات للدرجة الثانية . فإذا كان عدد المشاهدين ١٢٠٠ متفرج وكان إيراد المباراة ٤٤٠٠ ريال فكم عدد رواد الدرجة الأولى ؟

(٣٣) إذا كان ثلث مجموع عددين يساوي $-\frac{١}{٣}$ بينما ثلث الفرق بينهما يساوي ٣، فما هما العددان ؟

(٣٤) يعمل زيد بأجر قدره $٥\frac{١}{٢}$ ريال للساعة وماجد بأجر قدره $٦\frac{١}{٢}$ ريال للساعة . وقد عملا معاً في أحد الأسابيع لمدة ٤٥ ساعة فحصلا على مبلغ إجمالي قدره $٢٦٦\frac{١}{٢}$ ريالاً . كم ساعة أمضى كل منهما في العمل ؟

(٣٥) أثبت أن النقط أ (٠ ، ١) ، ب(-١ ، ٢) ، جـ (٣ ، ٤) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية دون أن تستخدم نظرية فيثاغورس. حدد الزاوية القائمة في المثلث أ ب جـ .

(٣٦) عين المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة من بين المستقيمات التالية :

(أ) ٢س + ٣ص = ٥ (د) ٩ص = ٦س -١

(ب) ٤ص = ٦س -٣ (هـ) ص = $\frac{١}{٢}$ (٣س -٤)

(جـ) ٤س + ٦ص -٧ = ٠ (و) ص + ٢ = - $\frac{٢}{٣}$ س

(٣٧) أوجد معادلة المستقيم الذي يمر في النقطة (٢ ، ٣) ويكون عمودياً على المستقيم ٣ س + ص = ٥

(٣٨) أوجد معادلة المستقيم الذي يتقاطع مع المستقيم س + ٢ ص + ١١ = ٠ في النقطة (-١١ ، ٠) بزاوية قائمة .

(٣٩) أوجد طول العمود النازل من النقطة (١ ، ٣) على المستقيم س + ص = ٢ .

(٤٠) أثبت أن المستقيمات الثلاثة : ٣ س - ٢ ص - ١٤ = ٠

٥ س - ٤ ص - ٢٦ = ٠

س - ٧ ص - ٣٠ = ٠

تتلاقى في نقطة واحدة.

(٤١) إذا كانت أ =(٣ ، ٤) ب = (٥ ، -١) ، جـ= (٢ ، ١) ، د = (-٣ ، ١) وكان $ل_١$ المستقيم العمودي على القطعة [أ ب] والمنصف لها، $ل_٢$ المنصف العمودي للقطعة [جـ د] ، فأوجد نقطة تقاطع $ل_١$ مع $ل_٢$.

(٤٢) أوجد طول العمود النازل من النقطة (-١ ، -٢) على المستقيم ٣ س +٢ ص = ٦٠

(٤٣) أوجد بعد النقطة (-٢ ، ٣) عن المستقيم س + ص = ٠

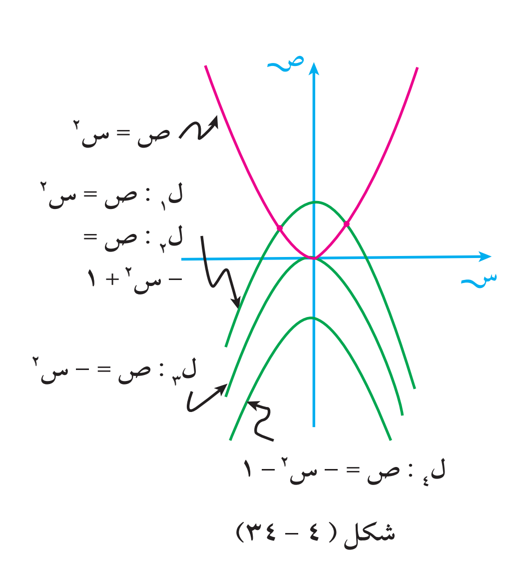
(٤٤) أوجد المسافة بين النقطة (٠ ، ٠) والمستقيم ٧ س + ٩ ص = ٦٣

(٤٥) إذا اعتبرنا المسافة بين المستقيمين المتوازيين بأنها المسافة بين أي نقطة على أحدهما والمستقيم الآخر، فأوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين ص = س + ١ ، ص = س -٢. وضِّح إجابتك بالرسم.

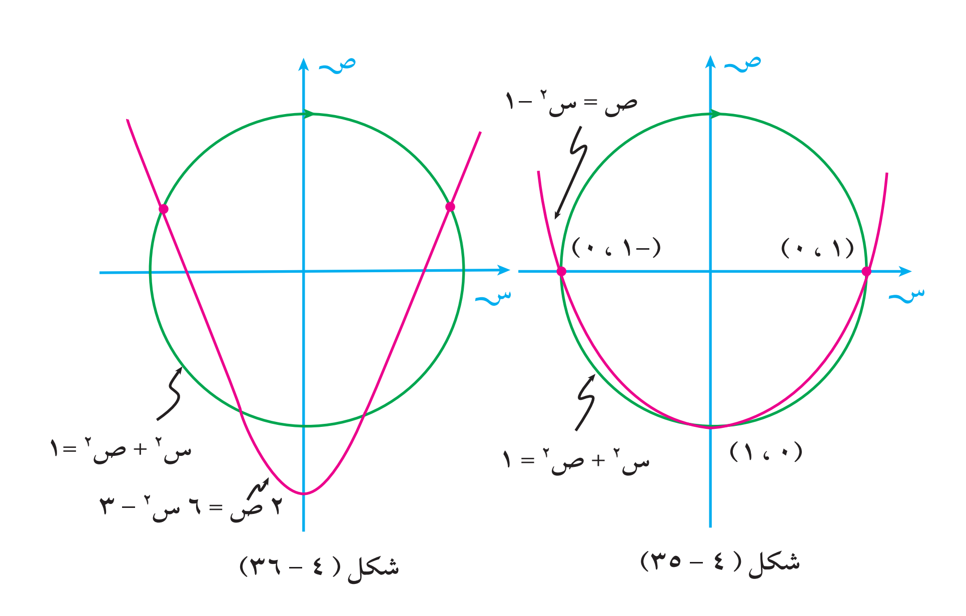
٤ – ٥ نظام معادلتين من الدرجة الثانية في متغيرين

في البند السابق وجدنا أن عملية حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين هي ـ من الناحية الهندسية ـ إيجاد نقط تقاطع المستقيمين الممثلين للمعادلتين، وعندما تكون المعادلتين مستقلتين ، أي غير متكافئتين ، فإنه يوجد حل واحد على الأكثر لذلك النظام.

ماذا تتوقع إذاً أن تكون عليه الحال في نظام المعادلتين من الدرجة الثانية ؟ بما أن كل معادلة يمثلها منحن في المستوى الإحداثي، فإنه يبدو لأول وهلة ـ بالنظر إلى الشكل (٤ ـ ٣٤) ـ أن المنحنيين قد لا يتقاطعان، مثل $ل_١$ وَ $ل_٤$ ، وقد يتقاطعان في نقطة واحدة، مثل $ل_١$ وَ $ل_٣$ ، وقد يتقاطعان في نقطتين ، مثل $ل_١$ وَ $ل_٢$ ، ولكن الوضع أكثر تعقيداً من ذلك بقليل، وسنجد أن لبعض أنظمة الدرجة الثانية ثلاثة حلول كما في الشكل (٤ ـ ٣٥) أو أربعة حلول كما في الشكل (٤ – ٣٦) .



شكل (٤ – ٣٤)



شكل (٤ – ٣٥)

شكل (٤ – ٣٦)

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية كما ظهرت في (٤ ـ ١٧) هي :

$$أ\ س^٢ + ب\ ص^٢ + جـ\ س\ ص + د\ س + هـ\ ص + و = ٠$$

حيث $أ \neq ٠$ أو $ب \neq ٠$ أو $جـ \neq ٠$ ولكننا لن نحاول أن نعالج الحالة العامة لمعادلتين من هذا النوع كما فعلنا بالنسبة لمعادلات الدرجة الأولى في البند السابق، وذلك لصعوبة الموضوع. بل سنتناول أنماطاً معينة من معادلات الدرجة الثانية تكون قابلة للحل إما بالتعويض أو بالحذف أو بالتحليل.

الخطوة الأولى لحل معادلتين من الدرجة الثانية في متغيرين لا تختلف عن مثيلتها في حل النظام الخطي، وهي التخلص من أحد المتغيرين بالوسيلة المناسبة للحصول على معادلة في متغير واحد تكون قابلة للحل بإحدى الطرق التي سبق عرضها في هذا الباب. ثم نحصل على قيم المتغير الآخر بالتعويض في إحدى المعادلتين الأصليتين.

أولاً : النظام المكون من معادلة خطية وأخرى من الدرجة الثانية

مثال (٤ ـ ٢٧)

أوجد حل النظام $س - ص = -١$

$$٤س^٢ + ص^٢ = ٢٥$$

الحـــــلّ :

مثل هذا النظام قابل للحل في جميع الأحوال بطريقة التعويض الموضحة في الخطوات التالية :

١ ـ نستخدم المعادلة الخطية، وهي الأولى، للتعبير عن أحد المتغيرين ، وليكن ص ، بدلالة الآخر.

$$ص = س + ١$$

٢ ـ نعوض عن ص في المعادلة الثانية بقيمتها التي توصلنا إليها في الخطوة (١) فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية في س فقط

$$٤\ س^٢ + (س+١)^٢ = ٢٥$$

$$٤ س^{٢} + س^{٢} + ٢ س + ١ = ٢٥$$

$$٥ س^{٢} + ٢ س - ٢٤ = ٠ \qquad (٤ ـ ٣٢)$$

٣ ـ نوجد حل المعادلة (٤ ـ ٣٢) بالطرق الموضحة في البند (٤ ـ ١) إما باستخدام القانون (٤ ـ ٩) أو بالتحليل للحصول على قيم س .

بتحليل الطرف الأيمن من المعادلة (٤ ـ ٣٢) نحصل على :

$$(٥س + ١٢)(س - ٢) = ٠ \Leftarrow س = ٢ \text{ أو } س = \frac{-١٢}{٥}$$

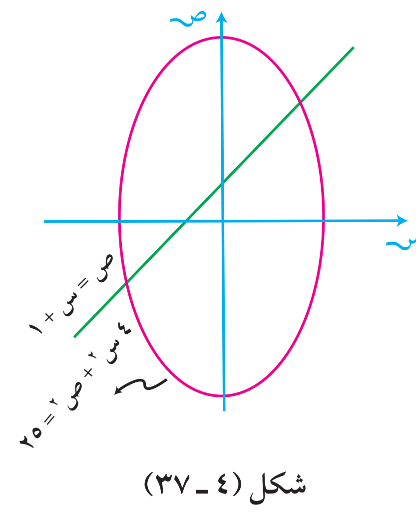
٤ ـ وأخيراً نحصل على قيم ص المناظرة بالتعويض في إحدى المعادلتين الأصليتين ، ولتكن الأولى لأنها أبسط :

$$س = ٢ \Leftarrow ص = ٢ + ١ = ٣$$

$$س = \frac{-١٢}{٥} \Leftarrow ص = \frac{-١٢}{٥} + ١ = -\frac{٧}{٥}$$

وبذلك تكون مجموعة الحل للنظام المعطى هي $\{(٢ ، ٣) ، (-\frac{١٢}{٥} ، -\frac{٧}{٥})\}$

مما يدل على أن المستقيم الذي يمثل المعادلة الخطية يتقاطع مع منحنى المعادلة الثانية في النقطتين (٢، ٣) وَ $(-\frac{١٢}{٥} ، -\frac{٧}{٥})$ ، كما هو موضح في الشكل (٤ ـ ٣٧) .



شكل (٤ ـ ٣٧)

مثال (٤ ـ ٢٨)

أوجد حل النظام

$$٣ س - ٤ ص = ٢٥$$
$$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$$

الحـــلّ :

$$س = \frac{١}{٣}(٤ ص + ٢٥) \qquad \text{من المعادلة الخطية}$$

$$\frac{١}{٩}(٤ ص + ٢٥)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ \qquad \text{بالتعويض في معادلة الدرجة الثانية}$$

$$١٦ ص^٢ + ٢٠٠ ص + ٦٢٥ + ٩ ص^٢ = ٢٢٥$$

$$٢٥ ص^٢ + ٢٠٠ ص + ٤٠٠ = ٠$$

$$ص^٢ + ٨ ص + ١٦ = ٠$$

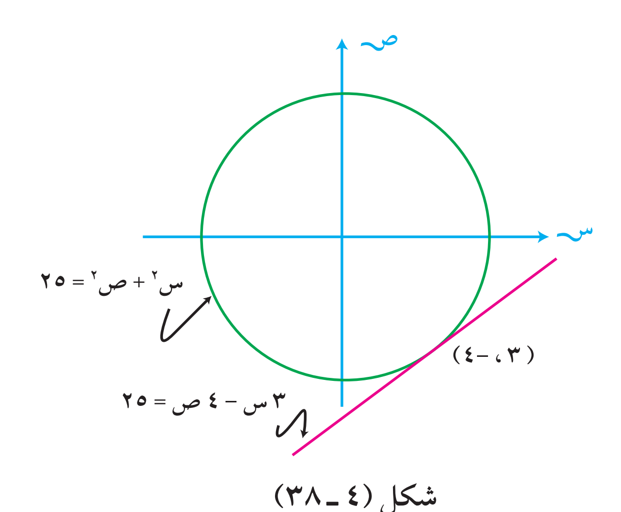
$$(ص + ٤)^٢ = ٠$$

$$\Leftarrow \quad ص = -٤$$

$\Leftarrow \quad س = \frac{١}{٣} (-١٦ + ٢٥) = ٣$ بالتعويض في المعادلة الخطية

فتكون مجموعة الحل للنظام المعطى هي

{(٣ ، -٤)} ، كما هو موضح في الشكل (٤ـ٣٨)



شكل (٤ـ٣٨)

ثانياً : النظام المكون من معادلتين كل منهما على صورة $أ س^٢ + ب ص^٢ = جـ$

مثال (٤ـ٢٩)

أوجد حل النظام $\quad ٢س^٢ - ٣ ص^٢ = ٥$

$$٣ س^٢ + ٤ ص^٢ = ١٦$$

الحـــــلّ :

في هذه الحالة بإمكاننا أن نعتبر معادلتي النظام خطيتين في المتغيرين $س^2$ وَ$ص^2$ ونستخدم أساليب البند السابق، أي الحذف أو التعويض، لإيجاد $س^2$ وَ $ص^2$ ، ومن ثم نحصل على س وَ ص باستخراج الجذر التربيعي .

سنستخدم طريقة الحذف للتخلص من $ص^2$، وذلك بضرب المعادلة الأولى في ٤ والثانية في ٣ ثم جمعهما :

$٤ (٢ س^2 - ٣ ص^2) + ٣ (٣ س^2 + ٤ ص^2) = ٤ (٥) + ٣ (١٦)$

$١٧ س^2 = ٦٨$

$س^2 = ٤$

$\Leftarrow س = \pm ٢$

وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على

$٣ (\pm ٢)^2 + ٤ ص^2 = ١٦$

$ص^2 = ١$

$\Leftarrow ص = \pm ١$

فتكون مجموعة الحل هي $\{(٢ ، ١) ، (٢ ، -١) ، (-٢ ، ١) ، (-٢ ، -١)\}$

مثال (٤ ـ ٣٠)

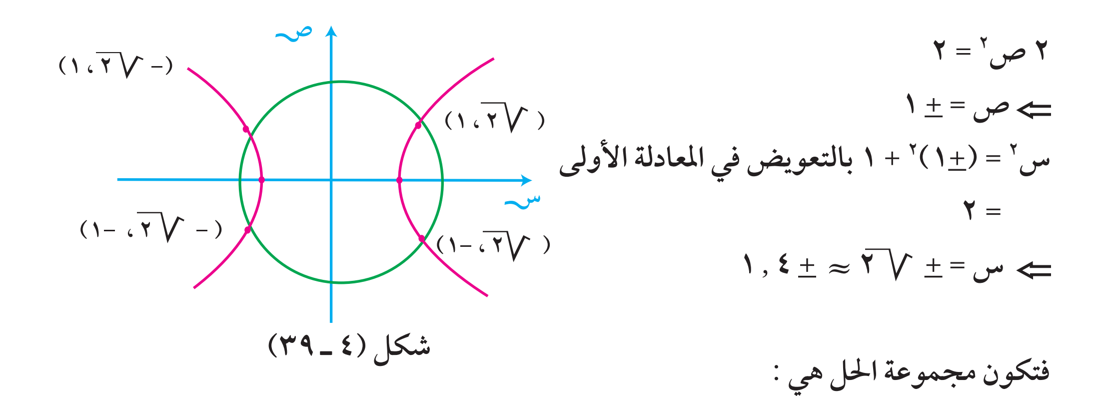
أوجد حل النظام $س^2 - ص^2 = ١$

$س^2 + ص^2 = ٣$

الحـــــلّ :

$س^2 = ص^2 + ١$ من المعادلة الأولى

$(ص^2 + ١) + ص^2 = ٣$ بالتعويض في المعادلة الثانية



٢ ص^{٢} = ٢

⇐ ص = ± ١

س^{٢} = (±١)^{٢} + ١ بالتعويض في المعادلة الأولى

= ٢

⇐ س = ± $\sqrt{٢}$ ≈ ± ١,٤

شكل (٤ ـ ٣٩)

فتكون مجموعة الحل هي :

{ ($\sqrt{٢}$ ، ١) ، ($\sqrt{٢}$ ، −١) ، (− $\sqrt{٢}$ ، ١) ، (− $\sqrt{٢}$ ، −١) } كما في شكل (٤ ـ ٣٩)

ثالثاً : النظام المكون من معادلتين من الدرجة الثانية إحـــداهـما قــابـلـة للتحليل

مثال (٤ ـ ٣١)

أوجد حل النظام

س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} = ٢٠

س ص − ص^{٢} = ٠

الحـــلّ :

نلاحظ هنا أن الطرف الأيمن من المعادلة الثانية قابل للتحليل

س ص − ص^{٢} = ص (س − ص) = ٠

⇐ ص = ٠ أو س − ص = ٠

في حالة ص = ٠ نحصل من المعادلة الأولى على

س^{٢} = ٢٠

⇐ س = ± $\sqrt{٢٠}$ = ± ٢ $\sqrt{٥}$

فنحصل على النقطتين (٢ $\sqrt{٥}$ ، ٠) ، (−٢ $\sqrt{٥}$ ، ٠)

وفي حالة ص = س نحصل من المعادلة الأولى على :

س^{٢} + ٣ س^{٢} + س^{٢} = ٢٠

س^{٢} = ٤

⇐ س = ± ٢

⇐ ص = ± ٢

فنحصل على النقطتين (٢ ، ٢) ، (−٢ ، −٢)

أي أن مجموعة حل النظام هي {($\sqrt{٢٠}$ ، ٠) ، (− $\sqrt{٢٠}$ ، ٠) ، (٢ ، ٢) ، (−٢ ، −٢)}

بعض المسائل التطبيقية

مثال (٤ ـ ٣٢)

أوجد أبعاد المستطيل الذي مساحته ٢٤ سم^{٢} ومحيطه ٢٠ سم .

الحـــل :

س

ص

شكل (٤ ـ ٤٠)

نفرض أن بعدي المستطيل س ، ص فيكون لدينا

س ص = ٢٤ .

٢ س + ٢ ص = ٢٠

وهو نظام مكوّن من معادلة من الدرجة الثانية وأخرى خطية

ص = ١٠ ـ س من المعادلة الخطية

س (١٠ − س) = ٢٤ بالتعويض في المعادلة الأولى

س^{٢} − ١٠ س + ٢٤ = ٠

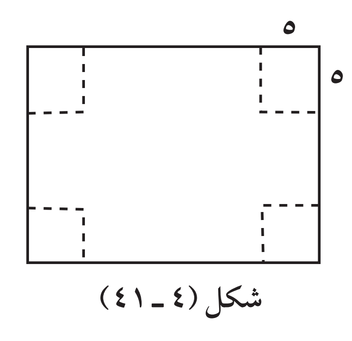
س = $\frac{١٠ \pm \sqrt{(١٠)^{٢} - ٤ (٢٤)}}{٢}$ بتطبيق القانون (٤ − ٩)

= $\frac{١٠ \pm ٢}{٢}$

عندما س = $\frac{١}{٢}$ (١٠ + ٢) = ٦ تكون ص = ١٠ – ٦ = ٤

وعندما س = $\frac{١}{٢}$ (١٠ – ٢) = ٤ تكون ص = ١٠ – ٤ = ٦

⇐ طول المستطيل ٦ سم وعرضه ٤ سم.

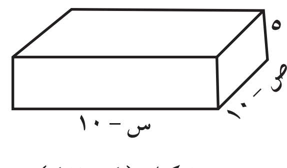


شكل (٤ ـ ٤١)

مثال (٤ ـ ٣٣)

ما هي أبعاد الصفيحة المستطيلة اللازمة لتكوين صندوق مفتوح بعد اقتطاع المربعات المبينة في الشكل (٤ ـ ٤١) من أركانها، علماً بأن مساحة الصفيحة الأصلية ٥٤٠ سم^{٢} وطول ضلع كل من المربعات المتقطعة ٥ سم وحجم الصندوق ٨٥٠ سم^{٣}.

الحـــل:



شكل (٤ ـ ٤٢)

نفرض أن:

س = طول الصفيحة الأصلية

ص = عرض الصفيحة الأصلية

فتكون مساحتها

س ص = ٥٤٠ (٤ ـ ٣٣)

واضح من الشكل (٤ ـ ٤١) والشكل (٤ ـ ٤٢) أن الصندوق المفتوح من أعلى الذي نحصل عليه بعد اقتطاع الأركان وثني الأطراف له الأبعاد التالية:

طول الصندوق = س – ١٠

عرض الصندوق = ص – ١٠

ارتفاع الصندوق = ٥

فيكون حجم الصندوق

٥(س – ١٠) (ص – ١٠) = ٨٥٠

⇐ (س – ١٠) (ص – ١٠) = ١٧٠

$\Leftarrow$ س ص − ١٠ س − ١٠ ص − ٧٠ = ٠ (٤ ـ ٣٤)

والآن نوجد س وَ ص بحل النظام المكون من المعادلتين (٤ ـ ٣٣) وَ (٤ ـ ٣٤).

ص = $\frac{٥٤٠}{س}$ من (٤ ـ ٣٣) لأن س ≠ ٠

س ($\frac{٥٤٠}{س}$) − ١٠ س − ١٠ ($\frac{٥٤٠}{س}$) − ٧٠ = ٠ بالتعويض في (٤ ـ ٣٤)

٥٤ − س − ($\frac{٥٤٠}{س}$) − ٧ = ٠ بالقسمة على ١٠

٥٤ س − س^{٢} − ٥٤٠ − ٧ س = ٠ بضرب طرفي المعادلة في س

س^{٢} − ٤٧ س + ٥٤٠ = ٠

$\Leftarrow$ س = $\frac{١}{٢}$ [٤٧ ± $\sqrt{(٤٧)^{٢} - ٤ (٥٤٠)}$] بتطبيق القانون (٤ − ٩)

= $\frac{١}{٢}$ [٤٧ ± ٧]

$\Leftarrow$ س = ٢٧ أو س = ٢٠

$\Leftarrow$ ص = $\frac{٥٤٠}{٢٧}$ = ٢٠ عندما س = ٢٧ ، ص = $\frac{٥٤٠}{٢٧}$ = ٢٧ عندما س = ٢٠

فنستنتج أن طول الصفيحة ٢٧ سم وعرضها ٢٠ سم.

مثال (٤ ـ ٣٤)

أسند سلم طوله ٢٠ م وآخر طوله ١٥ م على بناية بحيث وصلا إلى الارتفاع نفسه. فإذا كانت المسافة بين الطرف الأسفل لكل سلم والبناية تختلف بمقدار ٧م ، فما الارتفاع الذي وصل إليه السُّلَّمان؟

الحـــلّ :

باعتبار [أ ب] السلم الطويل، [أ جـ] السلم القصير كما في الشكل (٤ ـ ٤٣)، لنفرض أن

س = ارتفاع السلمين = |أ د|

ص = |جـ د|

أ
س
١٥
٢٠
ص
٧
د
جـ
ب

شكل (٤ ـ ٤٣)

بتطبيق نظرية فيثاغورس على المثلثين القائمين أ جـ د ، أ ب د نحصل على :

$س^2 + ص^2 = (١٥)^2 = ٢٢٥$

$س^2 + (ص + ٧)^2 = (٢٠)^2 = ٤٠٠$

وهو نظام مكوَّن من معادلتين من الدرجة الثانية. سنتخلص من $س^2$ بطرح المعادلة الأولى من الثانية

$(ص + ٧)^2 - ص^2 = ٤٠٠ - ٢٢٥$

$١٤ ص + ٤٩ = ١٧٥$

$\Leftarrow ص = \frac{١}{١٤}(١٢٦) = ٩$

و بالتعويض في المعادلة الأولى

$س^2 + (٩)^2 = ٢٢٥$

$\Leftarrow س = \pm \sqrt{١٤٤} = \pm ١٢$

وحيث أن الارتفاع س لا يمكن أن يكون عدداً سالباً فإن الارتفاع المطلوب يساوي ١٢م.

تمارين (٤ ـ ٥)

أوجد مجموعة الحل لكل من الأنظمة في التمارين من (١) إلى (٦)، موضحاً إجابتك بالرسم البياني :

(١) $ص = س$

$ص = س^2$

(٢) $ص = ٢ س - ١$

$ص = س^2$

(٣) $س - ص = ١$

$س^2 - ص = ١$

(٤) $- س + ص = ١$

$س^2 + ص^2 = ١$

(٥) $س + ٢ = ٠$

$س^2 + ص^2 = ٤$

(٦) $س + ص = ٢$

$س^2 + ص^2 = ٤$

أوجد الحل لكل من الأنظمة في التمارين من (٧) إلى (١٨) :

(٧) $س + ٢ ص = ١$

$س^٢ + ٤ ص^٢ = ٢٥$

(٨) $٣ س - ص = ٠$

$س^٢ - ص = ٤$

(٩) $٣ س - ص = -١$

$س^٢ - ص = -٣$

(١٠) $س - ص = ٣$

$س ص + ٢ = ٠$

(١١) $س^٢ + ص^٢ = ١$

$(س - ١)^٢ + ص^٢ = ١$

(١٢) $س^٢ - ص^٢ = ٠$

$س^٢ + ص^٢ = ٤$

(١٣) $س^٢ + ص^٢ = ١$

$س^٢ + ص^٢ = ٤$

(١٤) $س^٢ + ٤ ص^٢ = ٤٩$

$٢ س^٢ - ٣ ص^٢ = -١٢$

(١٥) $س^٢ - ص^٢ = ٠$

$س ص + ٦ = ٠$

(١٦) $٢ س^٢ - ٣ س ص + ص^٢ = ٠$

$س^٢ + ص^٢ + ٢ س = -٢$

(١٧) $س ص + س = ٠$

$٢ س^٢ - ٥ س ص + ص^٢ = ٢$

(١٨) $س^٢ + ص^٢ = ٠$

$س^٢ + ص^٢ + ٣ س + ٢ ص = ٠$

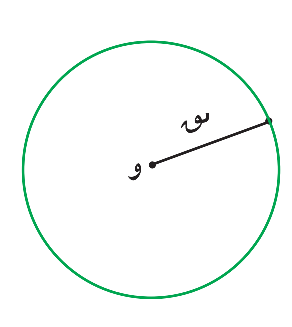
(١٩) أوجد أبعاد المستطيل الذي مساحته ٦٤ م^٢ ومحيطه ٤٠م.

(٢٠) أوجد أبعاد المستطيل الذي محيطه ١٤ سم وطول قطره ٥ سم.

(٢١) أوجد العددين اللذين حاصل ضربهما يساوي ٣ ومجموع مقلوبيهما $\frac{٧}{٦}$.

٤ - ٦ الدائـــرة

لعلك تتذكر أن الدائرة هي مجموعة نقط المستوي التي تبعد عن نقطة معلومة (و) من المستوي مسافة ثابتة نق . تسمى النقطة (و) مركز الدائرة والمسافة نق نصف قطر الدائرة.



شكل (٤ ـ ٤٤)

معادلة الدائرة

كما تعلمت في الصف الثالث المتوسط فإنه للحصول على معادلة الدائرة في المستوي

الإحداثي نفرض أن مركز الدائرة هو و (أ ، ب) وأن ن (س ، ص) أي نقطة على الدائرة، كما في الشكل (٤ – ٤٥). بما أن المسافة من و إلى ن تساوي نق مهما كان موقع ن على الدائرة، فإننا باستخدام قانون المسافة بين نقطتين نحصل على :

شكل (٤ ـ ٤٥)

$$|و ن| = نق$$

$$\sqrt{(س - أ)^2 + (ص - ب)^2} = نق$$

$$(س - أ)^2 + (ص - ب)^2 = نق^2 \qquad (٤ - ٣٥)$$

وهي المعادلة القياسية للدائرة بدلالة المركز (أ ، ب) ونصف القطر نق. لاحظ أن المعادلة (٤ – ٣٥) بعد إجراء عمليات التربيع وتجميع الحدود تأخذ الشكل

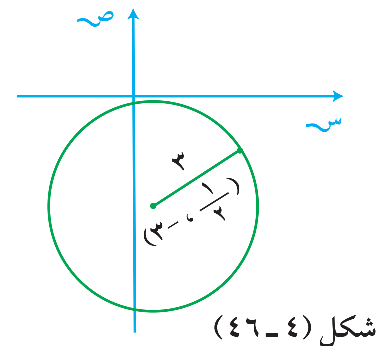
$$س^2 + ص^2 + (-٢ أ) س + (-٢ب) ص + (أ^2 + ب^2 - نق^2) = ٠$$

وهي صورة خاصة من معادلة الدرجة الثانية العامة (٤ ـ ١٧) يتساوى فيها معاملا $س^2$ و $ص^2$ ، ويكون فيها معامل س ص صفراً.

مثال (٤ ـ ٣٥)

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها $(\frac{١}{٢} ، -٣)$ ونصف قطرها ٣.

الحـــل :



شكل (٤ ـ ٤٦)

بالتعويض المباشر في (٤ ـ ٣٥) نحصل على

$$(س - \frac{١}{٢})^2 + (ص - (-٣))^2 = ٣^2$$

$$(س - \frac{١}{٢})^2 + (ص + ٣)^2 = ٩$$

مثال (٤ ـ ٣٦)

تحقق من أن المعادلة $٣ س^2 + ٣ ص^2 + ٦ س - ٣٠ ص - ٣٠ = ٠$ تمثل دائرة، ثم حدد مركزها ونصف قطرها.

الحــــلّ :

حيث أن معامل $س^٢$ يساوي معامل $ص^٢$ (كلاهما يساوي ٣) فإن المعادلة المعطاة قابلة للتحويل إلى الصيغة القياسية (٤ ـ ٣٥) :

$س^٢ + ٢ س + ص^٢ - ١٠ ص = ١٠$ بعد القسمة على ٣

$$س^٢ + ٢ س + (\frac{٢}{٢})^٢ + ص^٢ - ١٠ ص + (\frac{١٠}{٢})^٢ = ١٠ + ١ + ٥^٢ = ٣٦$$

بإكمال المربع على س ، ص . وبذلك نحصل على

$$(س + ١)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٦^٢$$

وهي معادلة دائرة مركزها (-١ ، ٥) ونصف قطرها ٦ .

نظرية (٤ - ٥)

المعادلة $س^٢ + ص^٢ + جـ س + د ص + هـ = ٠$

(١) تمثل دائرة إذا كانت $(\frac{جـ}{٢})^٢ + (\frac{د}{٢})^٢ - هـ > ٠$

(٢) تمثل نقطة واحدة إذا كانت $(\frac{جـ}{٢})^٢ + (\frac{د}{٢})^٢ - هـ = ٠$

(٣) لا يوجد للمعادلة حل إذا كانت $(\frac{جـ}{٢})^٢ + (\frac{د}{٢})^٢ - هـ < ٠$

(لا تمثل دائرة حقيقية)

البرهــــان :

بإكمال المربع على س وَص في المعادلة نحصل على :

$$س^٢ + جـ س + (\frac{جـ}{٢})^٢ + ص^٢ + د ص + (\frac{د}{٢})^٢ = (\frac{جـ}{٢})^٢ + (\frac{د}{٢})^٢ - هـ$$

$$(س + \frac{جـ}{٢})^٢ + (ص + \frac{د}{٢})^٢ = (\frac{جـ}{٢})^٢ + (\frac{د}{٢})^٢ - هـ$$

(١) عندما يكون الطرف الأيسر من هذه المعادلة موجباً فإن المعادلة - قياساً على (٤ - ٣٥) - تمثل دائرة نصف قطرها

$$\sqrt{(\frac{جـ}{٢})^٢ + (\frac{د}{٢})^٢ - هـ}$$

ومركزها $(-\frac{جـ}{٢} ، -\frac{د}{٢})$.

(٢) عندما يكون $(\frac{جـ}{٢})^٢ + (\frac{د}{٢})^٢ - هـ = ٠$ فإن

$$(س + \frac{جـ}{٢})^٢ + (ص + \frac{د}{٢})^٢ = ٠$$

$$\Leftarrow (س + \frac{جـ}{٢})^٢ = ٠ ، (ص + \frac{د}{٢})^٢ = ٠$$

لأن مربع العدد الحقيقي لا يكون سالباً

$$\Leftarrow س = -\frac{جـ}{٢} ، ص = -\frac{د}{٢}$$

مما يدل على أن $(-\frac{جـ}{٢} ، -\frac{د}{٢})$ هي النقطة الوحيدة التي تحقق المعادلة.

(٣) في حالة $(\frac{جـ}{٢})^٢ + (\frac{د}{٢})^٢ - هـ < ٠$ يصبح الطرف الأيمن من المعادلة

$$(س + \frac{جـ}{٢})^٢ + (ص + \frac{د}{٢})^٢ < ٠$$

وهذا غير ممكن لأن مربع العدد الحقيقي لا يكون سالباً، مما يدل على أن المعادلة في هذه الحالة لا يوجد لها حل في المجموعة ع × ع .

تدريب (٤ ـ ٦)

طبق هذه النظرية (٤ ـ ٥) على المثال (٤ ـ ٣٧).

مثال (٤ ـ ٣٧)

حدد المعادلات التي تمثل دوائر من بين المعادلات التالية :

(١) $س^{٢} - ص^{٢} + س + ٣ص + ٥ = ٠$

(٢) $س^{٢} + ص^{٢} + س + ٣ص + ٥ = ٠$

(٣) $س^{٢} + ص^{٢} + س + ٣ص + ١ = ٠$

(٤) $٣س^{٢} + ٣ص^{٢} - ٢١ص + \frac{١٤٧}{٤} = ٠$

الحـــلّ :

(١) نلاحظ أن معامل $س^{٢}$ ، وهو١ ، يختلف عن معامل ص٢ ، وهو −١ في الطرف الأيمن من المعادلة، فنستنتج أن المعادلة لا تمثل دائرة.

(٢) نلاحظ، باستخدام رموز النظرية (٤ ـ ٥)، أن

$$\left(\frac{جـ}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{د}{٢}\right)^{٢} - هـ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} - ٥$$

$$= \frac{١٠}{٤} - ٥ < ٠$$

إذن المعادلة ليس لها حل.

(٣) نلاحظ أن

$$\left(\frac{جـ}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{د}{٢}\right)^{٢} - هـ = \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٢} - ١ = \frac{١٠}{٤} - ١ > ٠$$

$\Leftarrow$ المعادلة تمثل دائرة مركزها $\left(\frac{-جـ}{٢} ، \frac{-د}{٢}\right) = \left(-\frac{١}{٢} ، -\frac{٣}{٢}\right)$

ونصف قطرها $\sqrt{\frac{١٠}{٤} - ١} = \sqrt{\frac{٦}{٤}} = \frac{١}{٢}\sqrt{٦}$

(٤) نحول المعادلة إلى الصيغة الواردة في النظرية (٤ ـ ٥) بالقسمة على ٣ :

$$س^{٢} + ص^{٢} - ٧ص + \frac{٤٩}{٤} = ٠$$

$$\left(\frac{جـ}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{د}{٢}\right)^{٢} - هـ = ٠ + \left(\frac{-٧}{٢}\right)^{٢} - \frac{٤٩}{٤} = ٠$$

إذن المعادلة تمثل النقطة الوحيدة $\left(٠ ، \frac{٧}{٢}\right)$

مثال (٤ ـ ٣٨)

استنتج معادلة الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث (١ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ، (−١ ، −١) وعين مركزها ونصف قطرها.

الحـــــلّ :

في معادلة الدائرة

س^{٢} + ص^{٢} + جـ س + د ص + هـ = ٠

الواردة في النظرية (٤ ـ ٥) نعوض عن (س ، ص) بالنقط الثلاث المعطاة للحصول على المعادلات الثلاث الآتية :

١ + جـ + هـ = ٠

٤ + ٢ د + هـ = ٠

٢ − جـ − د + هـ = ٠

بطرح المعادلة الثانية من الأولى نحصل على

(١ + جـ + هـ) − (٤ + ٢ د + هـ) = ٠

⇐ جـ − ٢ د = ٣   (٤ ـ ٣٦)

وبطرح المعادلة الثانية من الثالثة نحصل على

(٢ − جـ − د + هـ) − (٤ + ٢ د + هـ) = ٠

⇐ − جـ − ٣ د = ٢   (٤ ـ ٣٧)

وبذلك نكون قد تخلصنا من هـ الواردة في نظام المعادلات الثلاث، وتوصلنا إلى نظام خطي في جـ، د مكون من المعادلتين (٤ ـ ٣٦) وَ (٤ ـ ٣٧) واللتين بجمعهما نجد :

− ٥ د = ٥

⇐ د = − ١

⇐ جـ = ٢ (−١) + ٣ بالتعويض في المعادلة (٤ ـ ٣٦)

= ١

⇐ هـ = − ١ − ١ بالتعويض في المعادلة الأولى من النظام الأصلي

= − ٢

وبذلك نحصل على معادلة الدائرة المطلوبة

$$س^٢ + ص^٢ + س - ص - ٢ = ٠$$

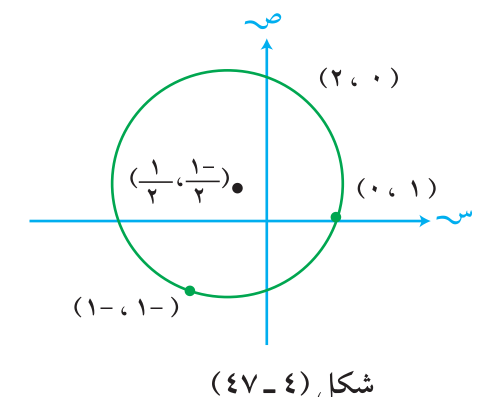
$$\Leftarrow (س + \frac{١}{٢})^٢ + (ص - \frac{١}{٢})^٢ = ٢ + (\frac{١}{٢})^٢ + (\frac{١}{٢})^٢ = \frac{٥}{٢}$$

بعد إكمال المربع على س ، ص

وهي دائرة مركزها $(-\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢})$

ونصف قطرها $\sqrt{\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٢}\sqrt{١٠}$

كما في الشكل (٤ ـ ٤٧).



شكل (٤ ـ ٤٧)

نظرية (٤ - ٦)

يتقاطع المستقيم مع الدائرة إما في نقطتين أو في نقطة واحدة أو أنهما لا يتقاطعان.

البرهـــــان :

المعادلة العامة للخط المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠

والمعادلة القياسية للدائرة $(س - د)^٢ + (ص - هـ)^٢ = نو^٢$

يشكلان نظاماً من معادلة خطية وأخرى من الدرجة الثانية، وهو بالتالي قابل للحل بالتعويض حسب ما هو موضح في البند (٤ ـ ٥)، فنحصل منه على معادلة من الدرجة الثانية في أحد المتغيرين. وبما أن معادلة الدرجة الثانية في متغير (أو مجهول) واحد ـ حسب ما ورد في البند

(٤ ـ ١) لها إما حلان أو حل واحد أو لا يوجد لها حل، وذلك حسب مميز المعادلة، فإننا نستنتج أن معادلتي المستقيم والدائرة لهما حلان على الأكثر وبالتالي يقطع المستقيم الدائرة في نقطتين على الأكثر.

عندما يقطع المستقيم الدائرة في نقطتين يسمى هذا المستقيم قاطعاً للدائرة، والجزء المحصور منه داخل الدائرة، وتراً. وعندما يقطعها في نقطة واحدة يسمى مماساً للدائرة، كما هو مبين في الشكل (٤ ـ ٤٨). وإذا لم يتقاطع المستقيم مع الدائرة نقول إن المستقيم خارجي.

شكل (٤ ـ ٤٨)

تَعَلَّمتُ من دراستك في المرحلة المتوسطة أن من أهم خواص المماس للدائرة أنه متعامد مع نصف القطر المار من نقطة التماس كما هو موضح في الشكل (٤ ـ ٤٩)، حيث ب نقطة التماس مع الدائرة التي مركزها و. والشكل (٤ ـ ٤٩) يوضح أيضاً أن بعد المركز و عن المستقيم المماس يساوي نصف القطر | و ب |.

شكل (٤ ـ ٤٩)

مثال (٤ ـ ٣٩)

أوجد نقط تقاطع المستقيم س − ص + ٢ = ٠ مع الدائرة التي مركزها (١ ، ٠) ونصف قطرها ٣.

الحــل:

معادلة الدائرة هي

(س − ١)^{٢} + ص^{٢} = ٣^{٢} = ٩

ومعاملة المستقيم هي

$ص = س + ٢$

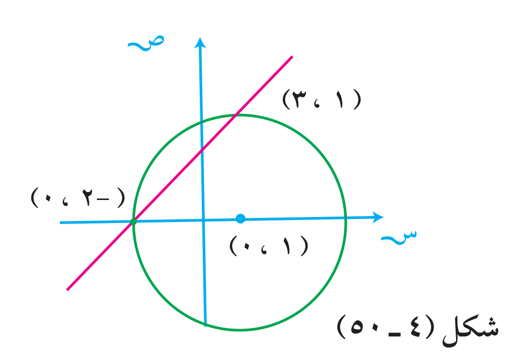
$\Leftarrow (س - ١)^٢ + (س + ٢)^٢ = ٩$ بالتعويض عن ص في معادلة الدائرة

$٢ س^٢ + ٢ س + ٥ = ٩$

$س^٢ + س - ٢ = ٠$

$(س + ٢)(س - ١) = ٠$

$\Leftarrow س = -٢ ، س = ١$



شكل (٤ ـ ٥٠)

وبالتعويض في معادلة المستقيم نحصل على ص = ٠ ، ص = ٣ على الترتيب، فتكون نقط التقاطع هي (-٢ ، ٠) ، (١ ، ٣).

تدريب (٤ ـ ٧)

يتضح من الشكل (٤ ـ ٥٠) أنه لو كان نصف قطر الدائرة يساوي ١ بدلاً من ٣ لما تقاطعت مع المستقيم. تحقق من ذلك بحل المعادلتين $س - ص + ٢ = ٠$ ،

$(س - ١)^٢ + ص^٢ = ١$.

مثال (٤ ـ ٤٠)

ادرس تقاطع المستقيم $س + ص = ٢$ مع الدائرة $٢ س^٢ + ٢ (ص + ١)^٢ = ٩$

الحـــلّ :

نعوض عن ص من معادلة المستقيم في معادلة الدائرة فنحصل على

$٢ س^٢ + ٢ [(٢ - س) + ١]^٢ = ٩$

$٢ س^٢ + ٢ (٣ - س)^٢ = ٩$

$٤ س^٢ - ١٢ س + ٩ = ٠$

$(٢ س - ٣)^٢ = ٠$

$\Leftarrow$ س = $\frac{٣}{٢}$ هو الجذر الوحيد (المضاعف) للمعادلة. وقيمة ص المقابلة هي

ص = ٢ − $\frac{٣}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

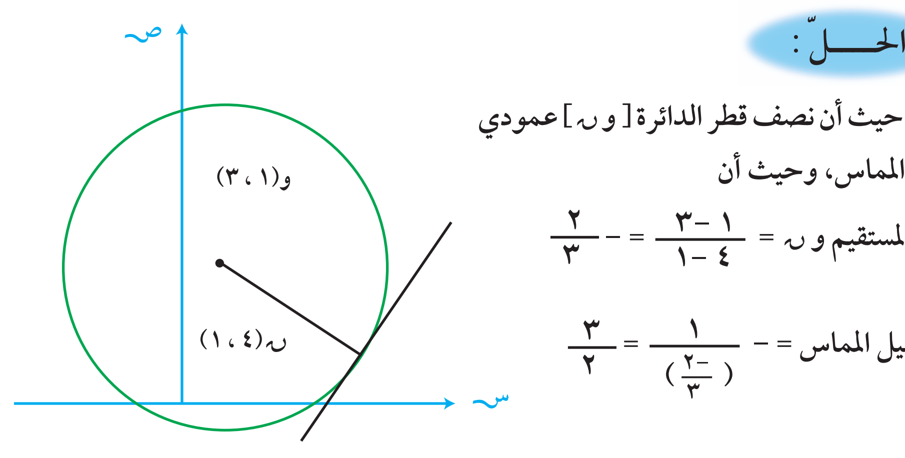
وحيث أن المستقيم يقطع الدائرة في النقطة الوحيدة فهو مماس لها عند هذه النقطة، كما هو واضح في الشكل (٤ ـ ٥١).

شكل (٤ ـ ٥١)

مثال (٤ ـ ٤١)

أوجد معادلة المماس عند ں (٤ ، ١) للدائرة التي مركزها و (١ ، ٣) والمارة من ں .

الحــــلّ :



شكل (٤ ـ ٥٢)

حيث أن نصف قطر الدائرة [و ں] عمودي على المماس، وحيث أن

ميل المستقيم و ں = $\frac{١ - ٣}{٤ - ١}$ = $-\frac{٢}{٣}$

فإن ميل المماس = $-\frac{١}{\left(\frac{-٢}{٣}\right)}$ = $\frac{٣}{٢}$

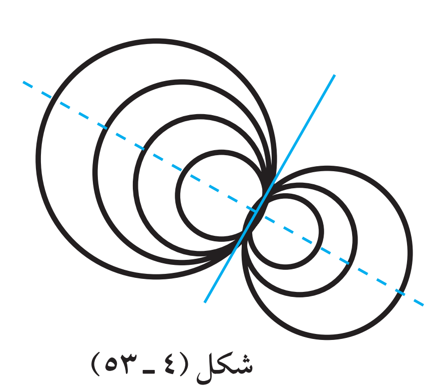
وبما أن المماس يمر بالنقطة (٤ ، ١) فإن معادلته

ص − ١ = $\frac{٣}{٢}$ (س − ٤) بتطبيق (٤ − ٢٢)

ملاحظة (٤ − ٩)

لاحظ أنه لا يوجد سوى مماس واحد لدائرة معلومة عند نقطة معلومة عليها.

ولكن من الواضح أنه بإمكاننا رسم مجموعة من الدوائر كل منها مماسة لمستقيم معلوم عند نقطة معلومة، كما في الشكل (٤ ـ ٥٣). ومن معلوماتك في المرحلة المتوسطة فإن مركز كل دائرة في المجموعة يقع على المستقيم المار بنقطة التماس والعمودي على المماس.


شكل (٤ ـ ٥٣)

مثال (٤ ـ ٤٢)

أوجد معادلة المماس للدائرة س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠ المار من النقطة (٠ ، ٣).

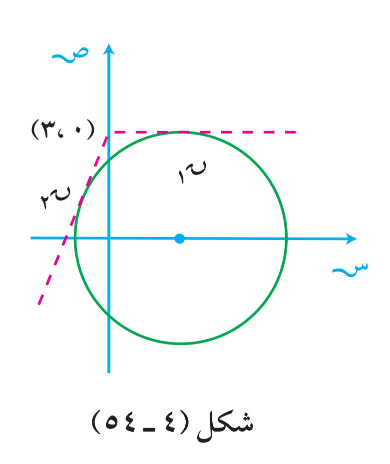
الحـــلّ :

س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠

⇐ (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٥ + ٤ = ٣^{٢}

⇐ مركز الدائرة (٢ ، ٠) ونصف قطرها ٣.

ومن الشكل (٤ ـ ٥٤) يتضح أن النقطة (٠ ، ٣) خارج الدائرة . تحقق من ذلك بمقارنة المسافة بين (٢ ، ٠) وَ (٠ ، ٣) مع نصف القطر.



شكل (٤ ـ ٥٤)

لنفرض أن ميل المماس = م ، معادلة المماس بدلالة الميل والجزء المقطوع من المحور ص هي

ص = م س + ٣ (٤ ـ ٣٨)

بالتعويض في معادلة الدائرة نحصل على

س^{٢} + (م س + ٣)^{٢} − ٤ س − ٥ = ٠

⇐ (م^{٢} + ١) س^{٢} + (٦ م − ٤) س + ٤ = ٠ (٤ ـ ٣٩)

لاحظ أن جذور المعادلة (٤ ـ ٣٩) أي قيم س التي تحققها ـ تعطي نقط تقاطع المستقيم (٤ ـ ٣٨) مع الدائرة، فإذا كان هذا المستقيم مماساً للدائرة فإن للمعادلة (٤ ـ ٣٩) جذراً واحداً

(مضاعفاً)، وهذا لا يتحقق إلا إذا كان المميز صفراً، أي أن

$$(٦م - ٤)^٢ - ٤ (م^٢ + ١) \times ٤ \quad = \quad ٢٠ م^٢ - ٤٨م$$

$$= \quad م (٢٠ م - ٤٨)$$

$$= \quad ٠$$

$$\Leftarrow م = ٠ \quad \text{أو} \quad م = \frac{٤٨}{٢٠} = \frac{١٢}{٥}$$

$\Leftarrow$ للدائرة مماسان من النقطة (٠ ، ٣) هما ص = ٣ ، $ص = \frac{١٢}{٥} س + ٣$

$\Leftarrow ١٢ س - ٥ ص + ١٥ = ٠$

تدريب (٤ ـ ٨)

١ ـ أوجد نقطتي التماس $ن_١$ ، $ن_٢$ وتحقق من أن بعديهما عن (٠ ، ٣) متساويان، مما يتفق مع معلوماتك من الهندسة المستوية.

٢ ـ يتضح لنا من المثال (٤ ـ ٤٢) أن للدائرة مماسين من نقطة خارجة عنها، وقد لاحظنا في المثال (٤ ـ ٤١) أنه لا يوجد سوى مماس واحد من نقطة عليها. ماذا تستطيع أن تقول عن المماس من نقطة داخل الدائرة؟

تمارين (٤ ـ ٦)

في التمارين من (١) إلى (٤) اكتب المعادلة بالصورة

$س^٢ + ص^٢ + جـ س + د ص + هـ = ٠$ للدائرة التي مركزها ونصف قطرها نق :

١ ـ و = (٠ ، ٠)، نق = ٢

٢ ـ و = (١ ، −٢)، نق = $٢\sqrt{٢}$

٣ ـ و = $(\frac{٧}{٢} ، −٣)$، نق = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٤ ـ و = $(−\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢})$، نق = $\frac{٥}{٣}$

في التمارين من (٥) إلى (١٦) ضع كل معادلة تمثل دائرة في الصيغة القياسية (٤ ـ ٣٥) وحدد المركز ونصف القطر، مع رسم الدائرة :

٥ ـ س^{٢} + ص^{٢} − ١٦ = ٠

٦ ـ س^{٢} + ص^{٢} + ٤ = ٠

٧ ـ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س = ٠

٨ ـ س^{٢} + ص^{٢} + ٢ س − ٦ ص = ٠

٩ ـ س^{٢} + ٢ ص^{٢} − ٢ س = ٠

١٠ ـ ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} − س + $\frac{١}{٢}$ = ٠

١١ ـ س^{٢} + ص^{٢} − ٣ س + ص = ٠

١٢ ـ س^{٢} − ص^{٢} = ١

١٣ ـ $(\frac{\text{س}-١}{٢})^{٢}$ + (ص + ١)^{٢} = ١

١٤ ـ ٣ س^{٢} +٣ ص^{٢} + ٢ س −٤ ص = ٠

١٥ ـ س^{٢} + ٢ س ص + ص^{٢} − ١ = ٠

١٦ ـ س^{٢} + ص^{٢} − ٤ س + ٢ ص + ٦ = ٠

في التمارين من (١٧) إلى (٢٣) أوجد معادلة الدائرة التي تحقق الشروط المذكورة، موضحاً إجابتك بالرسم :

١٧ ـ المركز (٢ ، ٠) وتمر بالنقطة (٠ ، ٠)

١٨ ـ المركز (٠ ، ٣) وتمر بالنقطة (٠ ، ٦)

١٩ ـ المركز على المستقيم ص = س ومماسة للمحور سـ عند (٣ ، ٠)

٢٠ ـ طرفا القطر (−٢ ، ٣) وَ (٦ ، ٥)

٢١ ـ نصف القطر ١ ، ومماسة للمحوين سـ وَ صـ

٢٢ ـ تمر بالنقط (٢ ، −٥)، (٠ ، ٠)، (٣ ، ٧)

٢٣ ـ تمر بالنقط (١ ، −٢)، (١٠ ، ٥)، (٥ ، ٤)

ادرس تقاطع المستقيم مع الدائرة في كل من التمارين من (٢٤) إلى (٢٨) ، موضحاً إجابتك بالرسم :

٢٤ ـ س + ص = ٧ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥

٢٥ ـ س + ٢ص = ٥ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٥

٢٦ ـ ص = س + ٢ ، (س − ٢)^{٢} + ص^{٢} = ٨

٢٧ ـ س + ص = ٢ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١

٢٨ ـ س + ٢ ص = ٨ ، س^{٢} + ص^{٢} − ٤ ص − ٦ س − ١ = ٠

حدد موقع النقطة ں بالنسبة لكل دائرة في التمارين من (٢٩) إلى (٣٧) ثم استنتج معادلة المماس للدائرة المار بالنقطة ں (إن وجد)، موضحاً إجابتك بالرسم :

٢٩ ـ س^{٢} + ص^{٢} = ١٦ ، ں = (٤ ، ٠)

٣٠ ـ س^{٢} + ص^{٢} = ٩ ، ں = (٤ ، ٠)

٣١ ـ س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ، ں = (٤ ، ٠)

٣٢ ـ س^{٢} + ص^{٢} + ٣ س − ص − ٣٠ = ٠ ، ں = (−٣ ، ٦)

٣٣ ـ س^{٢} + ص^{٢} − ٣ س − ١٤ = ٠ ، ں = (٢ ، ٤)

٣٤ ـ ٢ س^{٢} + ٢ ص^{٢} − ٣ س +٥ ص = ٠ ، ں = (٢ ، −٢)

٣٥ ـ س^{٢} + ٢ ص^{٢} − ٣ س − ٣ ص − ٨ = ٠ ، ں = (٠ ، −١)

٣٦ ـ س^{٢} + ص^{٢} −٣ س − ٣ ص − ٨ = ٠ ، ں = (٤ ، ٤)

٣٧ ـ س^{٢} + ص^{٢} − ٣س −٣ ص − ٨ = ٠ ، ں = (٠ ، ٠)

تمـــاريـــن عامـــــــــة

١ ـ استخدم الآلة الحاسبة لتحويل كل من القيمتين المقربتين للعدد ط : $\frac{٢٢}{٧}$ ، $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ إلى عدد عشري ، ثم بيّنً أي القيمتين أقرب إلى ط؟

٢ ـ اعتبر المعادلة :

هـ س^{٢} − ٢ (هـ − ١) س + (هـ − ١) = ٠ حيث هـ رمز لعدد حقيقي.

(أ) أوجد قيمة هـ التي تجعل للمعادلة حلاً حقيقياً واحداً.

(ب) أوجد قيمة هـ التي تجعل أحد الحلين يساوي −١ ثم أوجد الحل الآخر.

(د) أوجد قيم هـ التي تجعل للمعادلة حلين مختلفين، وقيم هـ التي تجعل المعادلة مستحيلة الحل في ع .

٣ ـ أثبت أن المعادلة $س^٢ - (هـ - ١)\ س + (هـ - ٢) = ٠$ لها حل واحد أو حلين لكل قيم هـ الحقيقية.

٤ ـ إذا كان في المعادلة $أ\ س^٢ + ب\ س + جـ = ٠$ ، ب عدد زوجي فاستنتج قانوناً مختصراً لجذري المعادلة في حالة وجودهما. (أفرض $ب = ٢\ بَ$).

٥ ـ (أ) ارسم منحني المعادلة $ص = - س^٢ + ٢\ س + ٣$ على الفترة [−٢ ، ٤] ثم استنتج من الشكل جذري المعادلة $- س^٢ + ٢\ س + ٣ = ٠$

(ب) ارسم على الشكل السابق المستقيم ص = ل ثم عين قيمة ل التي تجعل هذا المستقيم مماساً للمنحني الذي رسمته.

(جـ) إذا كان ل = −٥ فأوجد نقطتي تقاطع المستقيم ص = ل والمنحني $ص = -س^٢ + ٢\ س + ٣$ معتمداً على الرسم البياني ثم تحقق من ذلك جبرياً.

٦ ـ احسب أبعاد القطعة المستطيلة التي مساحتها ٢ $سم^٢$ وطول قطرها $\sqrt{٥}$ سم.

٧ ـ لدينا قطعة أرض مساحتها ١٨٠٠ $م^٢$ نريد أن نقسمها إلى ثلاث قطع متساوية كما في الشكل المجاور ثم نسوّر كل قطعة، فإذا كان الطول الإجمالي للسور هو ٢٤٠م فما أبعاد قطعة الأرض الأصلية؟

٨ ـ لدينا المثلث أ (٣ ، ٠) ، ب (١ ، ٤)، جـ (٥ ، ٦)

(أ) أثبت أن المثلث أ ب جـ قائم الزاوية بطريقتين مختلفتين.

(ب) أوجد معادلة كل من أضلاع المثلث أ ب جـ

(جـ) أوجد معادلة الارتفاع النازل على الوتر وأوجد طوله.

٩ ـ أ ب جـ د شكل رباعي رؤوسه أ = (−٤ ، ٥) ، ب = (٤ ، ٥) ، جـ = (٨ ، −٥) ، د = (−٨ ، −٥) ، والنقط هـ ، و ، ز ، ع تنصف أضلاعه [أب] ، [ب جـ] ، [جـ د]، [د أ] على الترتيب.

(أ) احسب طول محيط الشكل أ ب جـ د

(ب) احسب الأطوال |هـ و| ، |و ز| ، |ز ع| ، |ع أ|

(جـ) أوجد طول محيط الشكل هـ و ز ع .

(د) تحقق من أن الأضلاع المتقابلة في الشكل هـ و ز ع متساوية.

(هـ) تحقق من أن الأضلاع المتقابلة في الشكل هـ و ز ع متوازية.

١٠ ـ إذا كانت أ = (٣ ، ٢) ، ب = (−٢ ، ٣) جـ = (−٤ ، ٥)، فأوجد احداثيات النقطة د لكي يكون الشكل أ ب جـ د متوازي الأضلاع.

١١ ـ إذا كانت أ = (٣ ، ٤) ، ب = (−١ ، ٢) جـ = (٧ ، ١)، وكانت د منتصف [أب]، هـ منتصف [أجـ]، فتحقق من أن دهـ // ب جـ وأن |دهـ| = $\frac{١}{٢}$ |ب جـ|.

١٢ ـ أوجد معادلة الدائرة المماسة للمستقيم س + ٢ ص = ٣ عند (−١ ، ٢) والتي يقع مركزها على محور ص.

أجوبة تمارين الجزء الأول
الباب الثاني

التمارين (٢ ـ ٢)

١ ـ (أ) ليس تطبيقاً.

(ب) تطبيقا والمدى = ص

(جـ) ليس تطبيقاً.

(د) تطبيقاً المدى = { ٦ } ⊂ ص .

(هـ) ليس تطبيقاً.

٢ ـ (أ) (أ) م = { (١ ، ٤) ، (٢ ، صفر) ، (٣ ، ٥) } ،

(جـ) المجال = س، المجال المقابل = ص = المدى.

٣ ـ (ب) ١ ، (جـ) لا ، (م) نعم هما ٢ ، ٤

٤ ـ (أ) ١٠ ، ٢٦ ، ٣٧ ، هـ^{٢} + ١ ، هـ^{٢} + ٢ هـ + ٢ ،

(ب) المدى = { ٢ ، ٥ ، ١٠ ... } ⊂ ط.

٥ ـ (أ) ١ ، (ب) صفر ، (جـ) {١ ، صفر }

التمارين (٢ ـ ٣)

١ ـ (أ) ليس تطبيقاً ، (ب) تطبيقاً، المدى { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ليس متبايناً ، ليس شاملاً ، (جـ) تطبيقاً والمدى : { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، متباين ، شامل ، تقابل ، (ى) تطبيقاً والمدى : { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، متباين ، شامل ، تقابل ، (هـ) ليس تطبيقاً.

٢ ـ (أ) ٣ ، ٤١ ، ٦٢ ، ١٦ ، (جـ) نعم ٣ صورة الصفر ، ٥ صورة ٢ . (ى) ط ـ { ١ ، ٢ } ،

(هـ) نعم ، لا (المدى ≠ المجال المقابل).

٣ ـ (ب) ں = ٨ ، ٩ ، ١٤ ، -٤ على الترتيب ، (جـ) متباين وشامل ، (ى) تقابل.

٤ ـ (أ) صفر ، ١ ، صفر ، (ب) نعم (المدى : المجال المقابل)،

(جـ) لا (م (٤) = م (٥) = صفر ، ٤ ≠ ٥)

٥ ـ (أ) - ٦٤ ، - ٧٢ ، - ١٨٩ ، -٥٦ ، ٢٧٩ ، (ب) لا .

التمـاريـن (٢ ـ ٤)

١ ـ (أ) ٣ ، ٣ (ى) نعم

٢ ـ (أ) ٩ ، ٢٥ ، ٤٩ ، س^{٢} − ٢س + ١ ، (ب) لها إجابة الفقرة (أ) ، (جـ) ١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ١ ،

(ى) إجابة فقرة (جـ) ، (هـ) نعم ، (و) نعم.

٣ ـ (أ) ٢٤ ، (ب) ٤ ، (جـ) صفر ، (ى) ١١ ، (هـ) ٣ س + ٢ ، (و) ٢ س −١

(ز) ٣ س^{٢} + ٦ ، (ج) ٢٤٧ ، (ط) ٨٧ ، (ل) ٢٥٥ ، (ك) ٢٥٥.

٤ ـ (أ) ٦ ، ٦ ، ٧ (جـ) ع .

٥ ـ ٩ س^{٢} − ١٢ س + ٧ ، ٣ س^{٢} + ٧ ليسا متساويين.

التمـاريـن (٢ ـ ٥)

١ ـ د$_{١}$، د$_{٣}$. (٢) (أ) {٢} ، (ب) ∅ ، (جـ) {١ ، ٤ ، ٥ }

٢ ـ { ١ ، ٤ ، ٥ } ، (هـ) {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } .

٣ ـ (أ) { الصفر } ، (ب) { −٤ ، ٤ } ، (جـ) { −١ ، −٣ ، ١ ، ٣ } ، (ى) ∅ .

٤ ـ نعم ، ، د$^{-١}$ (ن) = $\frac{١}{٣}$(ن − ١)

٥ ـ (أ) −٢٧ ، −١ ، صفر ، ٢٧ ، (جـ) ٨ ، صفر ، −٢٧ ص ، (ى) ١ ، −٣ ، ٢ ، س.

٦ ـ لا.

التمارين العامة

١ ـ (أ) ١ ، ٢ ، ٥٠ .

(ب) { ٠ } ، ∅ ، { +٢ ، −٢ } ، { ٣ ، −٣ } ، ∅ .

(جـ) { ص : ص = س^{٢} + ١ ، س ∈ صـ }

(ى) ليس متبايناً ولا شاملاً.

٢ ـ (أ) نعم ، (م∘م) (ن) = ن^{٢} − ٢ ن + ٢ .

(ب) نعم ، (م∘م) (ن) = ن^{٢} .

(جـ) نعم ، المدى: صـ.

٣ ـ (أ) { ٢ ، −٢ }

(ب) { $\sqrt{٥}$ ، − $\sqrt{٥}$ } .

(جـ) { س : − ٣ ⩽ س ⩽ ٣ } .

(ى) { س : − $\sqrt{٣}$ ⩽ س ⩽ $\sqrt{٣}$ } .

٤ ـ ٧ ، { ١ ، ٣ } ، ∅ ، { ٢ ، ٤ ، ٥ } ، { −٢ ، ٧ } ، { −٢ ، −١ ، ٧ } ،
{ −٢ ، −١ ، ٧ } ، { −٢ ، −١ ، ٧ } ، { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، { ٢ } ، { ٢ } ،
على الترتيب.

ليس متبايناً ، ليس شاملاً ، ليس تقابلاً.

٥ ـ (أ) (م$_{٢}$ ∘ م$_{١}$) (س) = س^{٢} − ١ ، (م$_{١}$ ∘ م$_{٢}$) (س) = س^{٢} + ٢ س −١ .

(ب) ١٤ ، ٨ غير متساويين.

(جـ) − ٢ ، صفر

٦ ـ تقابلاً.

٧ ـ (أ) خاطئة ، (جـ) خاطئة،

(ب) خاطئة ، (د) صحيحة.

٨ ـ (أ) نعم ، نعم ، نعم ،

(ب) نعم ، (م ∘ م$^{-١}$) (س) = س م$^{-١}$ ∘ م = التطبيق المحايد.

١١ ـ ٨ .

١٢ ـ ن م .

الباب الثالث

التمارين (٣ ـ ١)

١ ـ (أ) مضلع ، (ب) ، (جـ) ، (ى) ليست مضلعات.

٢ ـ (أ) مقعراً ، (ب) مقعراً ، (جـ) محدباً

٦ ـ (أ) ٥ ، ٦ ، (ب) ٦ ، (جـ) ١٤ ، (ى) ن − ٢

٧ ـ (أ) ١١ ضلعاً ، (ب) ١٢ ضلعاً ، (جـ) ٨ أضلاع ، (ى) ١٣ ضلعاً ، (هـ) ١٥ ضلعاً.

٨ ـ ١٠ سم ، ١٥ سم.

٩ ـ محيط الأول ٤٥ سم ، محيط الثاني ٥٤ سم ، نسبة التشابه $\frac{٥}{٦}$.

١٠ ـ $\frac{٧٥}{٢}$ سم.

١١ ـ ٦ سم ، ١٠ سم ، ٨ سم ، ١٢ سم ، ١٦ سم ،

١٢ ـ ٥ سم

١٣ ـ $\frac{٢٨}{٥}$ سم

التمارين (٣ ـ ٢)

١ ـ (أ) غير منتظم ، (ب) غير منتظم ، (جـ) غير منتظم ، (ى) منتظم.

٢ ـ (أ) $١٢''$ $٣٤'$ ١٢٨° (ب) ١٤٤° ، (جـ) $٣٠'$ ١٥٧° (ى) ١٨٠ − $\frac{٣٦٠^\circ}{ن}$

٣ ـ (أ) ٧٢٠° ، (ب) ١٢٦٠° ، (جـ) ٢١٦٠° .

٤ ـ (أ) ٥ ، (ب) ١٠ ، (جـ) ٢٠ ، (ى) ٣٦ .

٦ ـ ٥٤ $\sqrt{٣}$ سم^٢ ،

٧ ـ ٤ : ١ .

التمارين (٣ ـ ٣)

١ ـ (أ) $٤٨''$ ٢٢ ١٨٣° ، (ب) ٣٦° ،

٢ ـ (أ) ١٠ , ٤ راديانًا ، (ب) ٢٥ , ٠ راديانًا ،

٣ ـ (أ) ١٢٩° ، (ب) $\frac{١}{٣}$ راديان ،

٥ ـ ٥,٥٨ سم ،

٦ ـ ١٢ سم ،

٧ ـ ٧٢٠° ،

٨ ـ ٣٩,٠٨٨ سم^{٢} .

٩ ـ ١٤٤°

التمارين العامة

١ ـ (أ) ٢ ، (ب) ٥ ، (جـ) ٢٠ ، (ى) ٣٥

٢ ـ ٨١ سم^{٢} .

٣ ـ ٩ سم ، ١٥ سم ، ١٢ سم ، ١٨ سم .

٤ ـ ٥,٤٩٧ سم .

٥ ـ ٨ سم .

٦ ـ ١٦٨°٤٥′ .

٧ ـ ٢,٥ سم .

٨ ـ ٢٥ سم^{٢} ، ٥٠ سم^{٢} ، ٧٥ سم^{٢} ، ٥٤ سم^{٢} ، ١٥٠ سم^{٢} ، ١٥ سم .

٩ ـ ٣٢ سم .

١٢ ـ ١٠ سم .

١٤ ـ ٤,٥ سم ، ٧,٥ سم .

الباب الرابع

التمارين (٤ ـ ١)

١ ـ (أ) الدرجة الأولى ، معامل س هو ٣ والحد الثابت -١

(ب) الدرجة الثانية ، معامل س^{٢} هو ١ ، معامل س هو -١ والحد الثابت يساوي صفر .

(جـ) الدرجة الثانية ، معامل س^{٢} هو ٣ ، معامل س هو صفر ، الحد الثابت يساوي ١١ .

(د) الدرجة الثانية ، معامل $س^٢$ هو ١ ، معامل س هو −٦ والحد الثابت يساوي ٩ .

(هـ) الدرجة الرابعة ، المعاملات بعد نقل جميع الحدود إلى الطرف الأيسر هي : معامل $س^٤$ هو١ ، معامل $س^٣$ هو −١ ، معامل $س^٢$ هو صفر ، معامل س هو١ والحد الثابت يساوي٢.

(و) الدرجة الثانية ، معامل $س^٢$ يساوي ١١ ، معامل س هو الصفر ، الحد الثابت يساوي − ٩.

٢ ـ س = ٢ أو س = −١

٣ ـ $س = \frac{-٣ \pm \sqrt{١٣}}{٢}$

٤ ـ $س = \frac{٣ \pm \sqrt{٥٩}}{٥}$

٥ ـ لا يوجد حل

٦ ـ $س = ١ - \sqrt{٣}$ أو $س = -٣ - \sqrt{٣}$

٧ ـ $س = \frac{٣\sqrt{٢} + \sqrt{٦}}{٢}$ أو $س = \frac{\sqrt{٦} - \sqrt{٢}}{٢}$

٨ ـ $س = \frac{٢٥ \pm \sqrt{٥٤١}}{٢}$

٩ ـ س = $\pm$ ٤

١٠ ـ س = −٢ أو س = −٤

١١ ـ س = ٤ أو س = ٥

١٢ ـ $س = \frac{-٥ \pm \sqrt{٢٨}}{٢}$

١٣ ـ $س = \frac{١ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$

١٤ ـ س = ٤

١٥ ـ س = $\pm$ ٢

١٦ ـ لا يوجد حل

١٧ ـ العددان هما ٥ وَ ٨

١٨ ـ العدد هو ٨

١٩ ـ (أ) س = −د أو س = هـ

(ب) س = $\frac{-\sqrt{٣} \pm \sqrt{٣ + ٤ د^٢}}{٢}$

(جـ) س = $\frac{-هـ \pm \sqrt{هـ^٢ + ٤ د^٢}}{٢ د}$

٢٠ ـ (أ) هـ = ٤

(ب) هـ = $\frac{٩}{٤}$ ، الحل الآخر هو $\frac{٧}{٩}$

(جـ) هو = − ٥

التمارين (٤ ـ ٣)

(١) $\frac{٣}{٢}$ (٢) ١ (٣) − $\frac{٥}{٣}$ (٤) غير معرَّف

(٥) صفر (٦) −٤ (٧) − (ص$_١$ + ١) (١٠) − $\frac{٣}{٤}$

(١١) − $\frac{٥}{٣}$ (١٢) صفر (١٣) −١ (١٥) − $\frac{٣}{١٠}$

(١٦) ص = − $\frac{٢}{٣}$ س +٢ (١٧) ص = س + $\frac{١}{٢}$

(١٨) ص = − $\frac{٣}{٢}$ س + ١ (١٩) ص = $\frac{٣}{٢}$ س − ١١

(٢٠) ص = $\frac{٧}{٥}$ س + ١٤ (٢١) ص = ٠

(٢٢) ص = − $\frac{٥}{٨}$ + ٤ (٢٣) ص = − $\frac{٧}{٥}$ س − $\frac{١٣}{١٠}$

(٢٤) ص = س − ١ (٢٥) ص − ٤ = $\frac{١}{٢}$ (س + ٢)

(٢٦) ص + ٤ = ٢ (س + ٣) (٢٨) ص + ١ = ٠

(٢٩) ص + ٢ = − $\frac{٤}{٥}$ س

(٣٣) ص = −١

(٣٤) ص − ٢ = س − ١

(٣٦) ص = − $\frac{١}{٣}$ (س + ١)

(٣٧) ص − ٢ = ٥ (س − ١)

(٣٩) ص = − س + ١

(٤٠) ك = ٤

(٤١) ك = − ٣

(٤٣) ص − ٥ = − ٢ (س + ٢)

(٤٤) ص = − س + ٣

(٤٦) ص − ٢ = $\frac{٢}{٣}$ (س − ٧)

التمارين (٤ ـ ٤)

(١) ($\frac{٩}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$)

(٢) المعادلتان متكافئتان

(٣) (٤ ، −٢)

(٦) لا يوجد حل

(٨) (٠ ، ٠)

(١٠) ($\frac{٣}{٧}$) ، − ($\frac{١}{٧}$)

(١٢) (٣، −١)

(١٤) لا يوجد حل

(١٦) (٧ ، ١)

(١٨) ($\frac{٢٣}{٧}$ ، $\frac{٩}{١٤}$)

(٢٠) (٢ ، ١)

(٢٤) (٥، −٢)

(٢٧) (−٢٣ ، −١١)

(٢٨) عدد غير منته من الحلول

(٢٩) ٣ ، ١٧

(٣٠) ١٣، ٨

(٣١) ٣٦ ، ٢٤

(٣٢) ٤٠٠

(٣٣) ٤ ، −٥

(٣٦) ٢٦، ١٩

(٣٧) ص − ٣ = $\frac{١}{٣}$ (س − ٢)

(٣٩) $\sqrt{٢}$

(٤١) − $\frac{٩}{١٤}$ ، $\frac{٥}{١٤}$

(٤٢) $\sqrt{١٣}$

(٤٣) $\frac{١}{٢}\sqrt{٢}$

(٤٤) $\frac{٦٣}{\sqrt{١٣٠}}$

(٤٥) $\frac{٣}{٢}\sqrt{٢}$

التمارين (٤ ـ ٥)

(١) (٠ ، ٠) ، (١ ، ١)

(٢) (١ ، ١)

(٤) (٠ ، ١) ، (-١ ، ٠)

(٦) (٠ ، ٢) ، (٢ ، ٠)

(٧) (-٣ ، ٢) ، (٤ ، $-\frac{٣}{٢}$)

(٩) (٢ ، ٧) ، (١ ، ٤)

(١١) ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}\sqrt{٣}$) ، ($\frac{١}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}\sqrt{٣}$)

(١٢) ($\sqrt{٢}$ ، $\pm\sqrt{٢}$) ، ($-\sqrt{٢}$ ، $\pm\sqrt{٢}$)

(١٣) لا يوجد حل

(١٥) ($\sqrt{٦}$ ، $-\sqrt{٦}$) ، ($-\sqrt{٦}$ ، $\sqrt{٦}$)

(١٦) لا يوجد حل

(١٧) (٠ ، $\pm\sqrt{٢}$) ، ($\frac{-٥ \pm \sqrt{٣٣}}{٤}$ ، -١)

(١٩) ١٦ ، ٤

(٢٠) ٤ ، ٣

(٢١) {(٢ ، $\frac{٣}{٢}$) ، ($\frac{٣}{٢}$ ، ٢)}

التمارين (٤ ـ ٦)

(٥) (٠ ، ٠) ، ٤

(٧) (٢ ، ٠) ، ٢

(٨) (-١ ، ٣) ، $\sqrt{١٠}$

(١٠) ليست دائرة

(١١) ($\frac{٣}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$) ، $\frac{\sqrt{١٠}}{٢}$

(١٢) ليست دائرة

(١٧) (س − ٢)^٢ + ص^٢ = ٤

(١٨) س^٢ + (ص − ٣)^٢ = ٩

(١٩) (س − ٣)^٢ + (ص − ٣)^٢ = ٩

(٢١) (س + ١)^٢ + (ص $\pm$ ١)^٢ = ١

(س − ١)^٢ + (ص $\pm$ ١)^٢ = ١

(٢٢) س^٢ + ص^٢ − ١٧ س − ص = ٠

(٢٣) س^٢ + ص^٢ − ١٨ س + ٦ ص + ٢٥ = ٠

(٢٤) (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣) (٢٥) (١ ، ٢)

(٢٦) (٠ ، ٢) (٢٧) لا يوجد نقطة تقاطع

(٢٨) $\left(\frac{٣٢ \pm ٤ \sqrt{٦٩}}{١٠} \text{ ، } \frac{٢٤ \pm ٢ \sqrt{٦٩}}{١٠} \right)$

(٢٩) س = ٤

(٣٠) ص = $\pm \frac{٣}{\sqrt{٧}}$ (س − ٤)

(٣١) لا يوجد مماس (٣٢) ١١ ص − ٣ س − ٧٥ = ٠

(٣٣) س − ٨ ص + ٣٤ = ٠ (٣٤) ص + ٢ = $\frac{٥}{٣}$ (س − ٢)

(٣٦) س + ص − ٨ = ٠ (٣٨) ٢

(٣٩) ٤

التمارين العامـــة

(٦) ٢ ، ١ (٧) ٦٠ ، ٣٠

(٨) ص = ٣ س − ٩ ، $\sqrt{١٠}$

(٩) (أ) ٢٤ + ٤ $\sqrt{٢٩}$ ، (ب) $\sqrt{٦١}$ ، (جـ) ٤ $\sqrt{٦١}$

(١٠) (١ ، ٤) ، (٥ ، ٠) (−٩ ، ٦)

(١٢) $س^{٢}$ + $(ص − ٤)^{٢}$ = ٥

شركة المطابع الأهلية للأوفست المحدودة
National Offset Printing Press Ltd. Co.
الرياض - المملكة العربية السعودية